Statistiques de comptage

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Pour illustrer les progrès accomplis dans la description des effets dus à l'emploi de temps morts de type généralisé, nous esquisserons deux développements qui montrent comment une extension peut conduire à une unification de formules qui semblaient avoir peu de points communs. Un effort majeur a aussi été investi pour arriver à une meilleure description d'un arrangement de deux temps morts en série où chacun est de type généralisé. Or ces études, souvent fastidieuses, ne se prêtent pas à une description brève et compréhensible.

1. Effet d'un temps mort généralisé pour une source décroissante

L'activité d'une source radioactive diminue inévitablement en fonction du temps mais, dans bien des applications, cet effet n'est guère gênant ou se corrige aisément. Cependant, il y a des exceptions importantes. Ainsi, pour atteindre une précision statistique suffisante, on est amené soit à travailler avec des activités très élevées (ce qui entraîne de nouvelles difficultés), soit à étendre la durée de la mesure. Dans ce dernier cas, le temps de mesure T peut devenir comparable à la période du radionucléide et il faut alors en tenir compte.

L'évaluation rigoureuse des effets combinés dus à la décroissance et au temps mort utilisé a été faite, il y a longtemps, par Axton et Ryves dans un travail qui est encore souvent cité [1]. Le point de départ est un taux originel décrit par

$$\rho(t) = \rho_o \, e^{-\lambda t} + \rho_b ,$$

où ρ_o est le taux de comptage dû à la source au début de la période de mesure ($t = 0$), ρ_b est le mouvement propre (supposé constant) et $1/\lambda$ la vie moyenne du nucléide étudié. La grandeur qui est effectivement mesurée est le taux moyen pour la durée de l'observation et peut donc être représentée par l'intégrale

$$\overline{R} = \frac{1}{T} \int_o^T R(t) \, dt ,$$

si R(t) désigne le taux momentané à la sortie du temps mort imposé.

Le résultat se présente sous deux formes différentes qui dépendent du type de temps mort. On obtient

- pour un temps mort τ non étendu (n):

$$_n\overline{R} = \frac{1}{1 + x_b} \{x_b + \frac{1}{\lambda T} \ln [\frac{1 + x_o + x_b}{1 + \Lambda x_o + x_b}]\} ,$$

- pour un temps mort τ étendu (e):

$$_e\overline{R} = \frac{e^{-x_b}}{\lambda T} \{e^{-\Lambda x_o} - e^{-x_o} + x_b[E_1(\Lambda x_o) - E_1(x_o)]\} ,$$

où $x_o = \rho_o \tau$, $\quad x_b = \rho_b \tau$, $\quad \Lambda = e^{-\lambda T}$

et $E_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t} dt$ est l'intégrale exponentielle.

On peut être tenté de voir si un résultat analogue se déduit également pour un temps mort généralisé, décrit par τ et le paramètre $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, bien que le succès d'une telle tentative soit loin d'être assuré, vu la différence dans la structure des formules connues pour les deux cas limites $\theta = 0$ et $\theta = 1$.

Il se trouve que tous les obstacles de parcours ont pu être surmontés et le résultat ainsi obtenu, valable pour un paramètre θ (et $\lambda > 0$), s'écrit sous la forme

$$_\theta\overline{R} = \alpha \left[\frac{x_o}{\lambda T} (1-\Lambda) + x_b\right]$$

$$+ \frac{\alpha}{\lambda T} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x_o)^n}{n!} \left[x_o \left(\frac{1-\Lambda^{n+1}}{n+1}\right) + x_b \left(\frac{1-\Lambda^n}{n}\right)\right] \sum_{k=1}^{n} k!\ S(n,k)\ (-\theta)^{n-k}\ \beta^k\right\},$$

dans laquelle on a utilisé les abréviations

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{e^{\theta x_b} - 1}{\theta} \quad \text{et} \quad \beta = \alpha\, e^{\theta x_b} ,$$

tandis que $S(n,k)$ est un nombre de Stirling de seconde espèce.

La dérivation de cette généralisation, dont l'emploi pratique à l'aide d'un petit programme d'ordinateur est moins compliqué qu'on ne pourrait le craindre, est trop longue pour être présentée ici; les détails techniques se trouvent dans le Rapport BIPM-88/1, où l'on indique également les passages à la limite (qui ne sont pas toujours évidents) pour les cas particuliers $\theta = 0$ ou 1, de même que pour $\lambda = 0$, complétant ainsi le travail original qui se contentait d'indiquer les résultats.

2. Une dérivation élémentaire de la formule de Takács

L'expression qui donne le taux de comptage R à la sortie d'un temps mort généralisé pour un processus de Poisson à l'entrée, avec taux ρ, est devenue une relation de base. Il est regrettable, par conséquent, que peu d'utilisateurs éventuels aient la possibilité de la vérifier et donc de l'appliquer en bonne conscience. Cette situation est due au fait que la voie traditionnelle utilisée pour sa dérivation est assez tortueuse: c'est à partir de la transformée de Laplace de la densité des intervalles que l'on peut former les moments $m_r(t)$ d'ordre r par dérivations successives. Puisque la distance moyenne entre événements observés détermine le taux à la sortie du dispositif de mesure, on a la relation $R = 1/m_1(t)$. Cependant, la transformée de Laplace est difficile à obtenir et il en résulte que l'acceptation de la formule de Takács devient trop souvent une question de confiance.

Nous avons trouvé une façon de contourner ces difficultés. Elle utilise un raisonnement que W. Feller [2] a décrit il y a fort longtemps dans un autre contexte, mais qui s'adapte facilement à nos besoins. Si, au lieu d'associer les temps morts étendus aux impulsions d'entrée, comme on a l'habitude de le faire, on les lie à celles de la sortie, on évite leur superposition et on arrive à avoir des pertes indépendantes. Par contre, la durée de la paralysie n'est alors plus constante, mais devient une variable aléatoire. C'est pour cette grandeur que Feller a évalué la transformée de Laplace. Ce nouveau temps mort "effectif" dépasse la valeur nominale τ du temps mort d'un montant que l'on peut appeler extension, et Feller a prouvé que sa valeur moyenne est

$$\eta = \frac{1}{\rho}\left(e^{\rho\tau} - 1 - \rho\tau\right) ,$$

où ρ est le taux originel du processus de Poisson à l'entrée du dispositif. Pour un temps mort purement cumulatif, la durée effective à associer à une impulsion sortante est donc

$$\tau_{eff} = \tau + \eta = \frac{1}{\rho}\left(e^{\rho\tau} - 1\right) .$$

L'utilisation de cette relation pour un temps mort généralisé est immédiate. Il suffit de se rappeler, puisque θ est la probabilité qu'un temps mort soit du type étendu, que seules des impulsions suivies d'un temps mort de ce type peuvent contribuer à une extension. Cela revient à remplacer ρ par $\theta\rho$ et donne pour le modèle généralisé un temps mort de durée moyenne

$$_{\theta}\tau_{eff} = \frac{1}{\theta\rho}\left(e^{\theta\rho\tau} - 1\right) .$$

Puisque les périodes de paralysie, maintenant associées aux impulsions de sortie, suppriment des événements de la séquence initiale à taux de comptage ρ, la relation entre taux d'entrée ρ et taux de sortie R est donnée par

$$R = \rho - R \; _{\theta}\tau_{eff} \; \rho ,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$R = \frac{\theta\rho}{e^{\theta\rho\tau} + \theta - 1} .$$

Ce résultat est la formule recherchée de Takács.

Notons que l'approche décrite permet d'autres applications, en particulier dans le cas de certains problèmes impliquant l'arrangement en série de deux temps morts dont l'un au moins est de type généralisé.

3. Autres travaux

Dans la tentative à long terme d'arriver à une caractérisation suffisamment complète du facteur de transmission T_1 qui décrit le comportement de deux temps morts arrangés en série, une étape intermédiaire a pu être franchie dans le Rapport BIPM-87/5.

Des affirmations persistantes, prétendant que les formules habituellement utilisées pour l'évaluation des coïncidences fortuites seraient erronées, nous ont amené à clarifier la situation dans le Rapport BIPM-87/6. Un article plus étendu sur le même sujet, écrit en collaboration avec D. Smith (NPL), où l'on réfute ces assertions, a été soumis pour publication. La question mineure de savoir s'il vaut mieux, en principe, associer les pertes de comptage aux impulsions d'entrée ou de sortie est tranchée dans la note BIPM WPN-232 en faveur de la deuxième proposition.

En ce qui concerne l'expression des incertitudes expérimentales, la situation a peu évolué et notre apport s'est limité à une contribution lors d'un colloque à Braunschweig (RFA). Par contre, l'élaboration d'un rapport pour l'ICRU, intitulé "Fundamentals of particle counting", est entrée dans une phase décisive et demande une attention soutenue.

Références

[1] E.J. Axton, T.B. Ryves: "Dead-time corrections in the measurement of short-lived radionuclides", Int. J. Appl. Rad. Isotopes 14, 159-161 (1963)

[2] W. Feller: "On probability problems in the theory of counters", in Studies and Essays (Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948) pp. 105-115.

(Octobre 1988)