Rapport BIPM-87/4

Statistiques de comptage

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Notre préoccupation majeure a été de progresser dans l'utilisation des possibilités offertes par des temps morts généralisés, qui se révèlent être un outil très prometteur tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental. La disponibilité de circuits électroniques appropriés permettant le contrôle des prévisions encourage leur développement.

Nous allons d'abord illustrer ce propos par un premier pas visant à développer une méthode pour la mesure directe d'un temps mort généralisé qui n'est pas directement accessible. Le second exemple concerne une application qui est plutôt d'un intérêt théorique.

1. Détermination du facteur de transmission T_1 pour un premier temps mort généralisé

Les arrangements de deux temps morts en série sont en général difficiles à traiter et suscitent peu d'enthousiasme. Pourtant, ils sont d'un intérêt pratique indéniable. Leur manque de popularité, cependant, est aussi dû au fait que les solutions connues correspondent le plus souvent à des situations peu réalistes. La raison principale en est que le premier temps mort τ_1 est presque toujours mal connu, alors que les formules le supposent bien déterminé, en valeur et en type.

Pour sortir de cette impasse, il faudrait donc développer de nouvelles méthodes de mesure pour déterminer τ_1, mais aussi dériver des formules qui permettent d'utiliser cette information, par exemple pour en déduire une valeur plus fiable du taux de comptage d'une source radioactive.

Si l'on réfléchit un peu à ces problèmes, on se rend compte que les deux tâches sont liées. On peut même trouver une approche qui permet de les résoudre pratiquement en même temps.

Un premier pas dans cette direction nécessite la connaissance du facteur de transmission appelé T_1. Il apparaît dans la description d'un arrangement de deux temps morts en série où le taux à la sortie est donné par (fig. 1)

$$R = \rho \, T_1 \, T_2 \, .$$

Fig. 1 - Arrangement schématique de deux temps morts en série, avec les taux de comptage d'entrée et de sortie.

Dans cette formule ρ est le taux (originel) à l'entrée de l'arrangement, que l'on cherche à déterminer, T_2 décrit les pertes dues à τ_2 seul et T_1 tient compte de l'influence supplémentaire de τ_1.

On connaît depuis longtemps des formules qui donnent T_1 en fonction du rappport $\alpha = \tau_1/\tau_2$ et des types respectifs des deux temps morts, qui peuvent être non étendu (N) ou étendu (E). Elles sont assez simples, à l'exception du cas "N,N" qui ne se traite que péniblement. Pour ce qui suit, il est pratique de les donner sous forme de développements en série, et on peut trouver (avec $x = \rho\tau_2$) que

$$T_1(N,N) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{2}(1+\alpha)\alpha^2 x^3, \qquad \text{pour } \alpha \leqslant 1/3 \ ,$$

$$T_1(E,N) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{6}(3-\alpha)\alpha^2 x^3, \qquad \text{pour } \alpha \leqslant 1 \ ,$$

$$T_1(N,E) \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 x^3, \qquad \text{pour } \alpha \leqslant 1 \ ,$$

$$T_1(E,E) \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3, \qquad \text{pour } \alpha \leqslant 1/3.$$

Ces formules permettent de voir qu'il n'y a pas de terme proportionnel à $\tau_1 = \alpha\,\tau_2$; l'effet dû à τ_1 apparaît pour la première fois sous la forme $\pm\frac{1}{2}(\rho\,\tau_1)^2$, où le signe dépend du type du deuxième temps mort. Cette observation, combinée avec ce que l'on connaît déjà d'un temps mort généralisé, permet de prévoir que l'influence du type de τ_1, exprimé par θ, n'apparaîtra que dans le terme de troisième ordre en x, et sous forme linéaire.

Il est maintenant facile d'écrire la forme explicite de l'influence du type du premier temps mort, compte tenu de ce qui vient d'être dit et des formes limites connues pour les types N ($\theta = 0$) et E ($\theta = 1$). Ainsi on trouve (pour $\alpha \leqslant 1/3$)

$$T_1(\theta,N) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{6}\left[3 + (3-4\theta)\,\alpha\right]\alpha^2 x^3,$$

$$T_1(\theta,E) \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 - \frac{1}{3}(1-2\theta)\,\alpha^3 x^3.$$

Ces résultats, auxquels nous sommes arrivés par des raisonnements heuristiques, gagneraient en crédibilité si l'un ou l'autre pouvait être confirmé indépendamment. Cela est en effet possible (quoique bien long) pour $T_1(\theta, E)$, nous affranchissant ainsi d'éventuels doutes.

Le bon achèvement de cette première étape a été assez pénible, mais il est décisif pour le développement d'une méthode permettant la mesure directe de τ_1 et θ, partie qui sera décrite quand les mesures seront terminées.

2. Transformation servant à "normaliser" une distribution de Poisson perturbée

Pour des raisons de commodité, il peut être souhaitable de transformer une variable X, qui est asymétrique, par une fonction appropriée $g(X) = Y$ en une nouvelle variable de façon à ce que Y suive une distribution normale, au moins pour $X \gg 1$. On sait que, si μ et σ^2 décrivent l'espérance et la variance de X, et en admettant que $\sigma = f(\mu)$ s'exprime comme une fonction connue, une transformée approximative s'obtient à l'aide de la relation

$$Y = g(X) \approx c \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{f(\mu)} \Bigg|_{\mu = X} ,$$

où c est une constante.

Pour le cas d'un processus de Poisson perturbé par un temps mort τ de type traditionnel, les résultats sont (avec $x = \rho\tau$)

- pour un temps mort non étendu,

où $\mu_n = \dfrac{\rho\tau}{1 + x}$ et $\sigma_n^2 = \dfrac{\rho\tau}{(1 + x)^3}$,

donc

$$\sigma_n = f(\mu_n) = \sqrt{\mu_n}\,(1 - \mu_n\,\tau/t) \text{ , d'où}$$

$$Y = g_n(X) \approx 2c\,\sqrt{t/\tau}\,\text{arctgh}\,\sqrt{X\,\tau/t} \;;$$

- pour un temps mort étendu,

où $\mu_e = \rho t\, e^{-x}$ et $\sigma_e^2 = \left(\dfrac{e^x - 2x}{e^{2x}}\right) \rho t$,

donc

$$\sigma_e = f(\mu_e) = \sqrt{\mu_e}\,\sqrt{1 - 2\mu_e\,\tau/t} \text{ , d'où}$$

$$Y = g_e(X) \approx 2c\,\sqrt{t/2\tau}\,\arcsin\sqrt{2X\,\tau/t} \,.$$

M.C. Teich (Columbia Univ., New York), qui a obtenu ces résultats[(1)], nous a demandé d'étudier le problème analogue pour un temps mort généralisé. Voici un bref résumé des résultats obtenus.

---

(1) TEICH, M.C. Normalizing transformations for dead-time-modified Poisson counting distributions. Biol. Cybern. 53, 1985, pp. 121-124.

Dans le cas général il faut partir des relations

$$\mu = \frac{\theta\rho t}{e^{\theta x} + \theta - 1} \qquad \text{et}$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[e^{\theta x}\,(e^{\theta x} - 2\theta x) + \theta^2 - 1\right]\,\theta\rho t}{(e^{\theta x} + \theta - 1)^3} \; .$$

Pour exprimer σ en fonction de μ, quelques arrangements fastidieux (décrits dans le Rapport BIPM-86/8) sont nécessaires pour des développements en série. On finit par trouver (en se limitant aux termes X^3), avec $\eta = \tau/t$,

$$g(X) \approx 2c\,\sqrt{X}\,\left[1 + \frac{1}{3}\,\eta X + \frac{1}{5}(1 + \frac{1}{2}\,\theta)\,(\eta X)^2 + \frac{1}{7}(1 + \frac{4}{3}\,\theta + \frac{1}{6}\,\theta^2)\,(\eta X)^3\right].$$

Il s'ensuit que ces développements deviennent, dans les cas limites correspondant aux types habituels de temps mort,

- pour $\theta = 0$:

$$g_n(X) \approx 2c\,\sqrt{X}\,\left[1 + \frac{1}{3}\,\eta X + \frac{1}{5}\,(\eta X)^2 + \frac{1}{7}\,(\eta X)^3\right], \quad \text{et}$$

- pour $\theta = 1$:

$$g_e(X) \approx 2c\,\sqrt{X}\,\left[1 + \frac{1}{3}\,\eta X + \frac{3}{10}\,(\eta X)^2 + \frac{5}{14}\,(\eta X)^3\right] .$$

Ces résultats sont en accord avec les expressions exactes données auparavant qui s'écrivent également sous la forme

$$g_n(X) = 2c\,\sqrt{X}\,\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + 1}\,(\eta X)^k \qquad \text{et}$$

$$g_e(X) = 2c\,\sqrt{X}\,\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k - 1)!!}{(2k + 1)k!}\,(\eta X)^k \; .$$

Il est possible d'exprimer la formule générale par la série

$$g(X) = 2c\,\sqrt{X}\,\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta X)^k}{(2k + 1)k!}\,\sum_{j=0}^{k} \mu(k,j)\;\theta^{k-j} \; ,$$

où les premiers coefficients $\mu(k,j)$ sont rassemblés dans le tableau 1 (on les a évalués jusqu'à $k \leqslant 8$).

Tableau 1

Valeurs numériques des coefficients $\mu(k,j)$ apparaissant dans la transformation $g(X)$

	j = 0	1	2	3	4	5
k = 0	1					
1	0	1				
2	0	1	2			
3	0	1	8	6		
4	0	1	24	56	24	
5	0	1	64	360	400	120

Ils ont la propriété $\sum_{j=0}^{k} \mu(k,j) = (2k - 1)!!$, mais leur loi générale, par exemple sous forme d'une récurrence, reste à découvrir.

3. Autres travaux

Il convient de mentionner en particulier le Rapport BIPM-85/14 qui explique le principe de l'échantillonnage sélectif "aveugle", pour lequel on n'a plus besoin de convertisseur de vitesse. Cette description n'a pas été distribuée auparavant car une demande de brevet était envisagée. Or, l'indiscrétion de visiteurs, auxquels la méthode avait été décrite, a mis fin à ce projet.

Deux études concernent des applications mathématiques. Dans la première (Rapport BIPM-86/16) on détermine le degré de corrélation introduit dans des données indépendantes en formant des différences successives ou des lissages. Dans la seconde (Rappport BIPM-87/1) sont calculés les coefficients qui apparaissent si l'on forme des puissances (réelles) d'une série formelle. Ce problème a trouvé une solution générale, grâce à une idée de P. Carré.

Pour des manuels en préparation à l'AIEA (Vienne) et l'ISO (Genève), nous avons fait des contributions pour les chapitres concernant l'expression d'incertitudes expérimentales.

(Octobre 1987)