

Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

Parmi les problèmes étudiés dans ce domaine, la mise en pratique de l'idée décrite dans le Rapport de 1973, p. 75, concernant la séparation quantitative entre impulsions individuelles et paires, superposées au hasard dans un processus de comptage, a occupé une place prépondérante. La situation actuelle, très prometteuse, sera brièvement décrite.

La comparaison internationale de mesure de débits de fluence de neutrons, organisée par le B.I.P.M., a soulevé le problème général du lissage d'un spectre expérimental mesuré à l'aide d'un sélecteur multicanaux. Le but est de réduire autant que possible les fluctuations statistiques sans introduire de déformations systématiques, permettant ainsi une détermination plus précise des paramètres caractéristiques tels que l'aire (intensité) et la position (énergie) des raies observées.

Quelques autres travaux de moindre importance ne seront pas décrits; ils sont énumérés dans la liste des publications. En outre, une partie considérable du temps a été consacrée à l'analyse d'une comparaison internationale de dosimétrie de neutrons (INDI), organisée par l'I.C.R.U. qui a eu lieu à Brookhaven (Etats-Unis).

a) Mesure d'impulsions secondaires

La proposition de détecter des impulsions arrivant sous forme de paires par un comptage qui ne distingue qu'entre des nombres pairs et impairs d'enregistrements (*voir* Rapports BIPM-72/14 et 73/10) a été mise à l'épreuve entre temps. La figure 1 rappelle le schéma du dispositif utilisé, construit par P. Bréonce.

Les portes A et B s'ouvrent et se ferment simultanément à un rythme qui est imposé par l'arrivée des impulsions. D'autre part, une impulsion émise par l'oscillateur à la fréquence ν , n'arrive à la sortie que si les deux portes sont ouvertes. Puisque l'impulsion qui cherche à passer par les deux portes n'arrive à B qu'après un retard δ produit par le registre à décalage, B ne sera ouverte que si un nombre pair d'impulsions sont arrivées dans l'intervalle de temps δ .

De façon générale, la fonction d'autocorrélation associée à un processus $x(t)$ est définie par

$$R(\delta) = E \{ x(t) \cdot x(t + \delta) \}.$$

Pour notre choix de x qui n'admet que les deux valeurs $+1$ et -1 , on en déduit

$$\begin{aligned} R(\delta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob}(k) \cdot (-1)^k = \text{Prob}(k \text{ pair}) - \text{Prob}(k \text{ impair}) \\ &= 2 \cdot \text{Prob}(k \text{ pair}) - 1, \end{aligned}$$

où k est le nombre d'impulsions comptées dans l'intervalle de temps δ . Quant à la mesure expérimentale de $R(\delta)$, on a (fig. 1).

$$v_1(\delta) / v_0 = \text{Prob (A ouverte)} \cdot \text{Prob (B ouverte)} = \frac{1}{2} \cdot \text{Prob (k pair)},$$

si $v_1(\delta)$ est le taux moyen des impulsions qui ont réussi à franchir les deux portes. Par conséquent, la relation

$$R(\delta) = \frac{4v_1(\delta)}{v_0} - 1$$

permet toujours de déterminer expérimentalement la fonction d'autocorrélation.

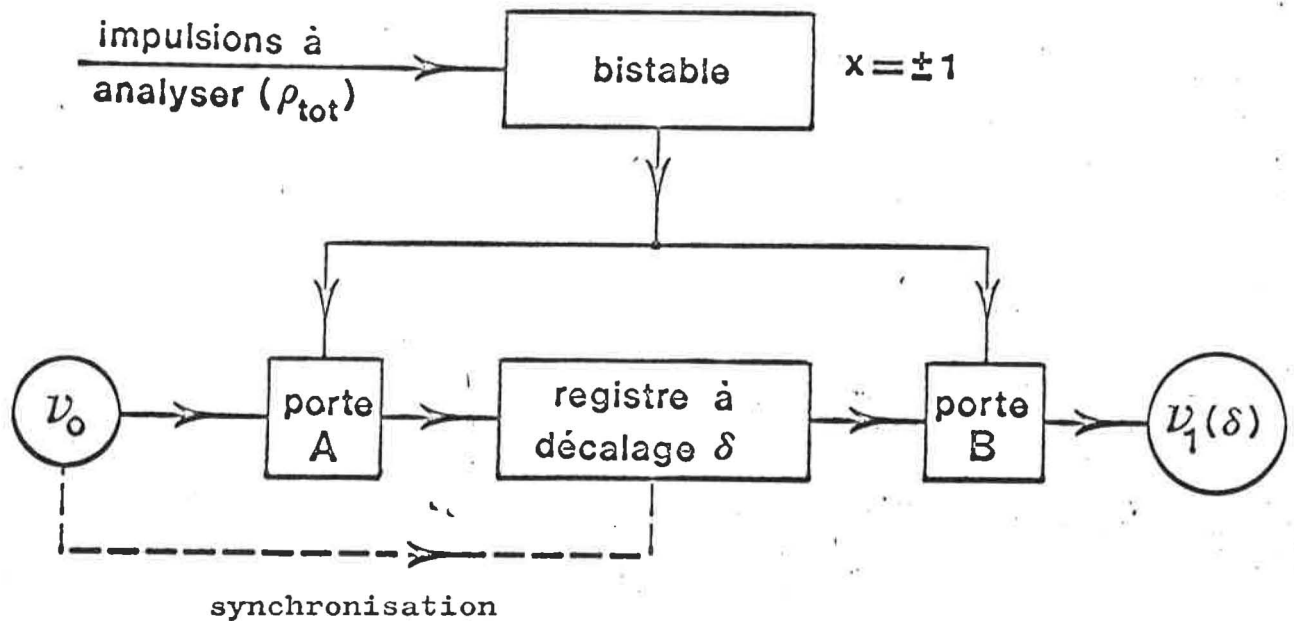


Fig. 1 .- Schéma du corrélateur permettant de mesurer des impulsions secondaires.

Si le processus étudié est en réalité une *superposition*,

$k = k_1 + 2 k_2$, où k_1 et k_2 désignent respectivement le nombre d'impulsions simples et le nombre de paires dans δ .

Puisque $\text{Prob (k pair)} = \text{Prob (k}_1 \text{ pair)}$, on a toujours

$$R(\delta) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \text{Prob (k}_1) \cdot (-1)^{k_1}.$$

En général, la décomposition du taux expérimental ρ_{tot} en ses composantes

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_1 + 2\rho_2$$

dépend de l'intervalle de mesure δ que l'on choisit. En particulier, ρ_2 disparaît pour $\delta \rightarrow 0$ parce que les partenaires formant une paire sont séparés par un intervalle de temps moyen $T > 0$. Posons cependant

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \rho_1 = \rho_s \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \rho_2 = \rho_p.$$

Le taux de comptage apparent pour ρ_1 est donc une fonction de δ qui dépend de la densité de probabilité $f(t_0)$ de l'intervalle t_0 entre impulsions primaire et secondaire.

En particulier, on obtient

$$\text{— pour } f(t_0) = \frac{1}{T} \cdot e^{-t_0/T}, \text{ avec } t_0 > 0 :$$

$$\rho_1(\delta) = \rho_s + 2\rho_p \left(\frac{1 - e^{-\delta/T}}{\delta/T} \right), \text{ et}$$

$$\text{— pour } t_0 = T :$$

$$\rho_1(\delta) = \begin{cases} \rho_s + 2\rho_p & \text{si } \delta \leq T \\ \rho_s + 2\rho_p \cdot (T/\delta) & \text{si } \delta \geq T. \end{cases}$$

On remarque que, indépendamment de la répartition exacte de t_0 , le taux apparent des impulsions individuelles tend vers

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho_s + 2\rho_p = \rho_{\text{tot}} & \text{pour } \delta \leq T \\ \rho_s & \text{pour } \delta \geq T. \end{cases}$$

Puisque la fonction d'autocorrélation, pourvu que le processus original soit Poissonien, est toujours donnée par

$$R(\delta) = \exp(-2\rho_1\delta),$$

il suffit de contrôler si ρ_1 reste constant ou change en fonction du retard δ , pour détecter la présence de paires. L'interprétation des résultats expérimentaux peut se faire à l'aide du graphique indiqué à la figure 2 où tout écart par rapport à une ligne droite indique la présence d'impulsions secondaires. Pour éprouver cette méthode de détermination du taux de paires (ou d'impulsions secondaires), nous avons superposé artificiellement des impulsions simples et doubles dont les taux étaient bien connus. Puis, cette série a été analysée expérimentalement, à l'aide du corrélateur décrit ci-dessus, pour voir si la fonction $R(\delta)$ montrait le comportement attendu. La figure 2 donne un exemple (pour t_0 fixe), et l'on constate que la courbe expérimentale correspond fort bien aux prévisions, c'est-à-dire que

$$-\ln R(\delta) = \begin{cases} 2\rho_{\text{tot}}\delta & \text{pour } \delta \leq T \\ 2\rho_{\text{tot}}\delta - 4\rho_p(\delta - T) & \text{" } \delta \geq T. \end{cases}$$

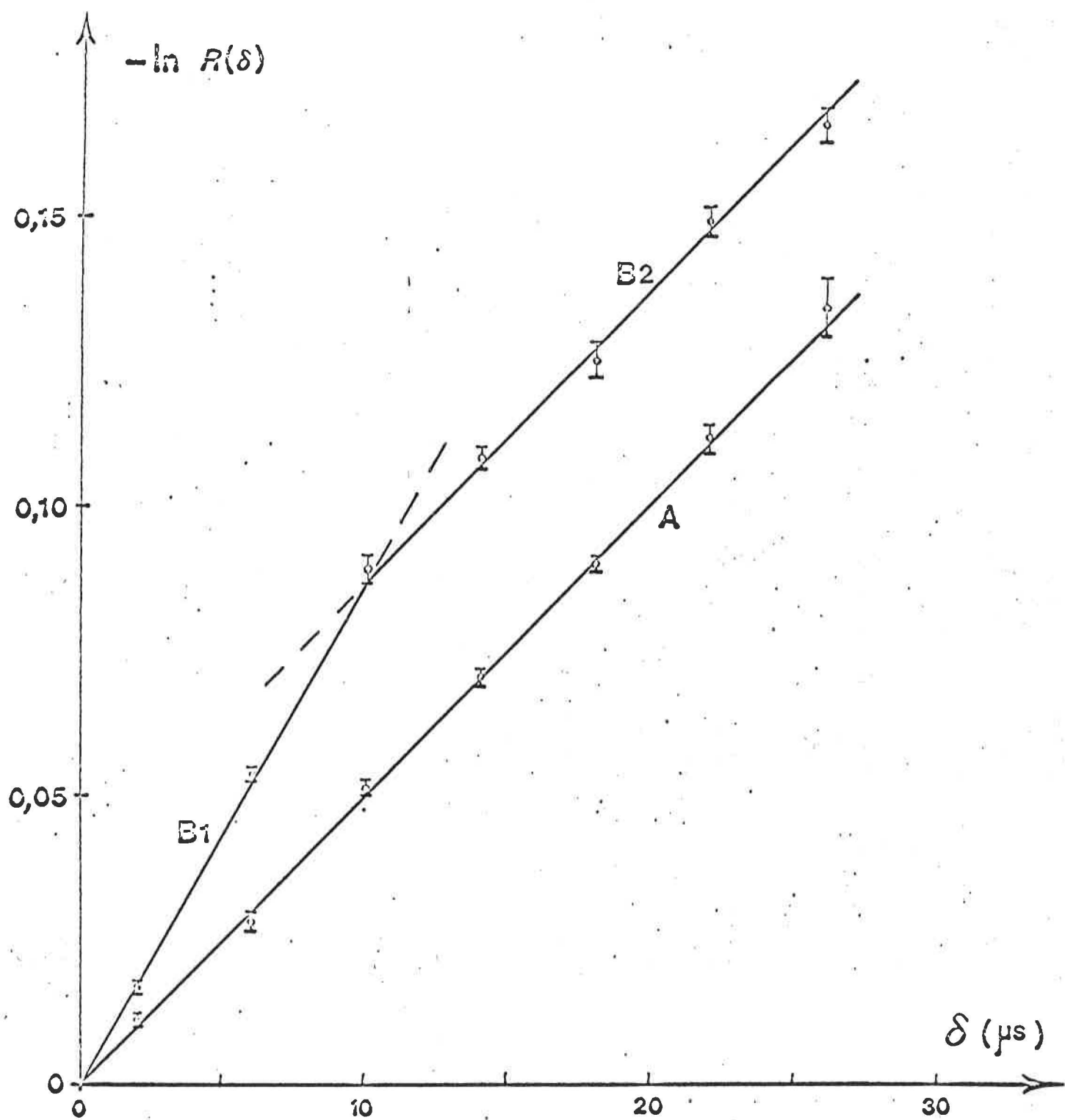


Fig. 2.- Mesure expérimentale de la fonction d'autocorrélation $R(\delta)$, avec les paramètres approximatifs :

A : $\rho_s = 2500 \text{ s}^{-1}$, $\rho_p = 0$

B : $\rho_s = 2500 \text{ s}^{-1}$, $\rho_p = 900 \text{ s}^{-1}$, $T = 10 \mu s$

Puisque ρ_{tot} se mesure directement avec beaucoup de précision, la ligne droite qui correspond à l'absence de paires peut être déterminée à l'avance, ce qui facilite la détection d'une éventuelle déviation. Pour des mesures de haute précision, il est nécessaire de tenir compte de l'influence du temps mort τ sur la fonction d'autocorrélation. Pour $\tau < \delta$, cela peut se faire, au moins de façon approximative (voir Rapport BIPM-70/8), si l'on remplace dans la dernière formule ρ_{tot} par $\rho_{\text{tot}}(1 + 2 \rho_{\text{tot}}\tau)$. De multiples mesures ont montré que la présence d'impulsions secondaires peut être bien établie même pour un rapport aussi bas que $\rho_p/\rho_{\text{tot}} = 0,005$. La méthode semble donc suffisamment sensible pour être d'un intérêt pratique dans la mesure d'impulsions secondaires.

b) Lissage d'un spectre expérimental

Soit un spectre expérimental donné sous forme de valeurs numériques y_i , qui représentent par exemple le contenu des canaux équidistants x_i . La méthode utilisée pour effectuer le lissage, qui n'est d'ailleurs pas nouvelle, consiste à faire un ajustement local des points voisins (au nombre de $n = 2m + 1$) par un polynôme de degré $p < 2m$ (fig. 3).

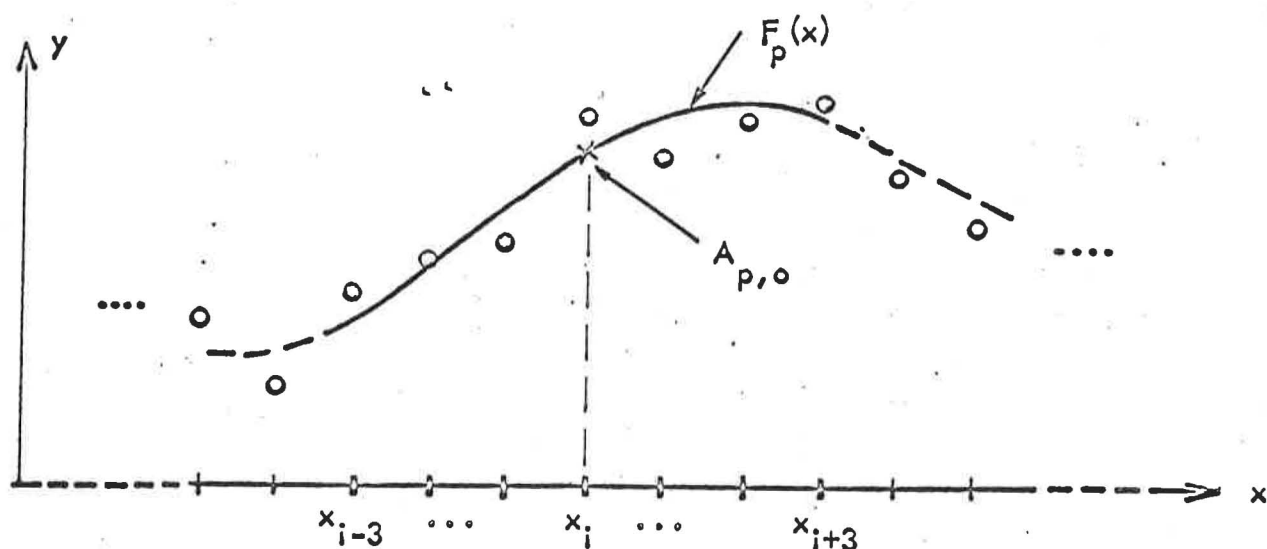


Fig. 3 .- Représentation schématique de l'ajustement local d'un polynôme $F_p(x)$ aux mesures y_i au voisinage de x_i (pour $m = 3$)

$A_{p,0}$ correspond à la valeur lissée du point central x_i .

Ce procédé est à la fois très simple et souple. En particulier, aucune hypothèse n'est faite sur la forme analytique des courbes observées dans le spectre qui peuvent dévier sensiblement d'une simple gaussienne. En s'appuyant sur la méthode des moindres carrés, les

coefficients $A_{p,k}$ de ce polynôme

$$F_p(x_i) = \sum_{k=0}^p A_{p,k} \cdot x_i^k$$

se déterminent à l'aide des équations normales correspondantes, qui peuvent être écrites sous la forme

$$\sum_{k=0}^p S_r + k \cdot A_{p,k} = G_r, \text{ avec } 0 \leq r \leq p,$$

$$\text{où } S_r \equiv \sum_{j=-m}^m j^r \quad \text{et} \quad G_r \equiv \sum_{j=-m}^m j^r \cdot y_{i+j}.$$

En choisissant le point central x_i comme origine momentanée, on obtient pour sa valeur ajustée et ses dérivées

$$F_p^{(k)}(0) = k! \cdot A_{p,k}, \quad k = 0, 1, \dots, p.$$

Le problème de déterminer les valeurs ajustées et leurs dérivées est donc équivalent à l'évaluation des coefficients $A_{p,k}$. Le fait que $S_r = 0$ pour k impair entraîne une décomposition du système d'équations normales en deux groupes et l'on peut en déduire que

$$A_{p,k} = A_{p+1,k}$$

pourvu que p et k aient la même parité. Une étude plus détaillée des équations normales révèle également que les coefficients sont toujours de la forme

$$A_{p,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=-m}^m y_{i+j} \cdot k^g_j,$$

d'où aussi

$$F_p^{(k)}(x_i) = y_i \otimes k^g_i.$$

L'ajustement correspond donc formellement à une convolution des données originales y_i avec une fonction discrète k^g_i . Puisque

$$k^g_i = \begin{cases} k^{g-i} & \text{pour } k \text{ pair} \\ -k^{g-i} & \text{" } k \text{ impair,} \end{cases}$$

où toutes les valeurs sont rationnelles, on peut aussi écrire

$$F_p^{(k)}(x_i) = \begin{cases} (k^C_0 \cdot y_i + \sum_{j=1}^m k^C_j \cdot D_j^+) / k^N & \text{pour } k \text{ pair} \\ (\sum_{j=1}^m k^C_j \cdot D_j^-) / k^N & \text{pour } k \text{ impair,} \end{cases}$$

avec $D_j^+ \equiv y_{i+j} \pm y_{i-j}$.

k^N et k_j^C sont des nombres entiers. Pour des paramètres p et m donnés, le facteur de normalisation k^N est choisi de sorte que les coefficients correspondants k_j^C n'aient plus de facteur commun.

L'ajustement d'après la dernière formule est donc facile si l'on dispose d'une tabulation des grandeurs k_j^C et k^N qui soit suffisamment complète pour tous les besoins pratiques. Depuis une dizaine d'années, on se servait des valeurs numériques publiées par A. Savitzky et M.J.E. Golay (1) qui semblaient bien convenir aux exigences pratiques. Or, quelques-unes de nos applications numériques ont parfois donné des résultats tellement peu vraisemblables que des doutes à l'égard des coefficients utilisés étaient difficiles à écarter et nous avons finalement décidé de les recalculer. Cette nouvelle tabulation, bien que très fastidieuse à établir, n'était point superflue : parmi les 389 valeurs calculées, 326 couvrent le même domaine que l'ancienne tabulation, dans laquelle 62 se sont révélées erronées. Le tableau I donne un extrait de la nouvelle tabulation. On a choisi les coefficients servant à déterminer la dérivée première pour un polynôme d'ordre 5, cas qui avait été particulièrement truffé de valeurs fausses.

Compte tenu du danger de commettre de nouvelles erreurs dans les calculs (qui dépassent la capacité de notre ordinateur pour les calculs en nombres entiers), il nous a semblé essentiel de disposer de quelques contrôles. Dans ce but, l'interprétation du lissage comme convolution a été particulièrement utile, permettant ainsi de prévoir quelques moments des fonctions k_j^C ; cela a conduit aux relations suivantes :

$$\sum_{j=1}^m j^{2r+k} \cdot k_j^C = 0, \text{ si } p \geq 2r+k, \quad (r = 1, 2, \dots)$$

et

$$\frac{2}{k!} \sum_{j=1}^m j^k \cdot k_j^C + \delta_{0k} \cdot C_0 = k^N.$$

Notons que toutes les nouvelles valeurs de k_j^C et k^N ont été trouvées en accord avec ces contraintes. Pour plus de détails techniques sur ce procédé de lissage on consultera le Rapport BIPM-74/1 qui contient également tous les coefficients nécessaires pour déterminer les valeurs ajustées et les dérivées premières ($k = 0$ et 1) à l'aide de polynômes de degrés p de 2 à 6 et pour un nombre de points allant jusqu'à 21 ($m = 10$). Un programme d'ordinateur qui fait les lissages nécessaires pour les spectres mesurés lors de la présente comparaison internationale de neutrons est à la disposition des intéressés ; il peut être aisément adapté à des applications semblables.

(1) *Analytical Chemistry*, 36, 1964, p. 1627.

TABLEAU I

Extrait de la nouvelle tabulation des coefficients

k^{C_j} , pour $k = 1$ et $p = 5$

Ces valeurs permettent d'obtenir la dérivée première d'un spectre expérimental à l'aide d'un ajustement à un polynôme d'ordre 5.

m	1^N	1^{C_1}	1^{C_2}	1^{C_3}	1^{C_4}	1^{C_5}
3	60	45	-9	1		
4	8 580	2 879	2 269	-1 381	254	
5	17 160	3 084	3 774	1 249	-2 166	573
6	291 720	31 380	45 741	33 511	12	-27 093
7	2 519 400	175 125	279 975	266 401	130 506	-65 229
8	503 880	23 945	40 483	43 973	32 306	8 671
9	9 806 280	332 684	583 549	686 099	604 484	348 823
10	637 408 200	15 977 364	28 754 154	35 613 829	34 807 914	26 040 033

m	1^{C_6}	1^{C_7}	1^{C_8}	1^{C_9}	$1^{C_{10}}$
6	9 647				
7	-169 819	78 351			
8	-16 679	-24 661	14 404		
9	-9 473	-322 378	-349 928	255 102	
10	10 949 942	-6 402 438	-19 052 988	-16 649 358	15 033 066

N.B.

Suivant une suggestion de L. Van der Zwan du N.R.C., on a également calculé les coefficients servant à déterminer la dérivée seconde. Il nous a fait remarquer qu'en mesurant le spectre des protons de recul, le spectre des neutrons correspondants est obtenu par différentiation. Par conséquent, pour déterminer la position exacte des raies, on aura besoin de la dérivée seconde du spectre mesuré. Pour réduire l'effort de calcul, on s'est contenté de polynômes jusqu'à $p = 5$. Une comparaison des 140 nouveaux coefficients ainsi obtenus avec l'ancienne tabulation de Savitzky et al. y fait découvrir 70 autres valeurs erronées. La détection de neutrons par des protons de recul est une technique que l'on envisage d'employer prochainement aussi au B.I.P.M.

(Octobre 1974)