

Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

Des questions concernant les impulsions secondaires ont suscité récemment l'intérêt de plusieurs laboratoires qui travaillent dans le domaine des mesures absolues d'activité. Cela s'explique par le danger que présenterait un tel comportement des compteurs, en faussant systématiquement tous les comptages. En vue des possibilités limitées de mesurer cet effet, il nous a paru utile de chercher d'autres méthodes. Par ailleurs, nos études prolongent de façon assez naturelle les travaux antérieurs sur les impulsions corrélées (problème "mère-fille"). Elles ont d'abord demandé une description plus claire et succincte du comportement statistique d'impulsions en présence de paires et nous ont finalement amenés à proposer un dispositif dont le principe est fort simple et général, permettant de mesurer quantitativement la présence d'impulsions multiples. Outre ce travail principal, quelques autres problèmes ont été traités également, comme le montre par exemple l'épreuve décrite brièvement ci-après pour la mise en évidence d'une distorsion due à un temps mort.

a) Détection de la présence d'un temps mort perturbateur

Dans l'analyse de distributions empiriques de comptages, on est souvent confronté avec le problème de savoir si l'on a le droit d'admettre que le processus étudié suit la simple loi de Poisson, ce qui faciliterait l'analyse. Normalement, une telle décision est fondée sur un contrôle général du type  $\chi^2$ . Or, dans le cas fréquent où l'on connaît à l'avance le genre de perturbation éventuelle, une épreuve plus spécifique serait souhaitable.

Considérons en particulier le cas d'un processus original de Poisson avec taux de comptage  $\rho$  qui a été distordu par un temps mort  $\tau$ . Alors, la probabilité d'observer  $k$  événements dans un temps  $t$ ,

$$P_{\mu}(k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}, \quad \text{avec } \mu = \rho \cdot t,$$

doit être remplacée par un développement (pour  $\tau \ll t$ )

$$W_{\mu}(k) = P_{\mu}(k) \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^j,$$

où les coefficients  $C_j$  dépendent de  $\mu$  et de  $k$ .

En supposant la perturbation petite - et ce n'est évidemment que dans ce cas que l'on a besoin d'un tel contrôle -, on se contentera de l'approximation

$$W_{\mu}(k) \approx P_{\mu}(k) \left[ 1 + k (\rho t - k + 1) \frac{\tau}{t} \right].$$

En utilisant la valeur moyenne expérimentale  $\bar{k} = \mu / (1 + \rho \tau)$ , on peut trouver pour la distribution modifiée la forme

$$W_{\mu}(k) \approx P_{\bar{k}}(k) \left\{ 1 + \left[ k - (k - \bar{k})^2 \right] \frac{\tau}{t} \right\}.$$

On en déduit que cette distribution est égale à la répartition originale si  $k = (k - \bar{k})^2$ , c'est-à-dire pour les deux valeurs

$$k_{\pm} = \bar{k} + \frac{1}{2} \mp \sqrt{\bar{k} + \frac{1}{4}},$$

qui ne dépendent plus du temps mort. Il s'ensuit que la présence d'un temps mort a pour effet d'augmenter la probabilité d'observer des valeurs  $k$  dans le domaine délimité par  $k$  et  $k_+$ , et de la réduire à l'extérieur, où la comparaison se fait par rapport à une distribution de Poisson dont l'espérance est égale à la valeur moyenne expérimentale  $\bar{k}$ . Il est remarquable que cette prévision concernant la distorsion de la distribution ne suppose aucune connaissance préliminaire de la valeur numérique ni du type de temps mort en question.

Par conséquent, un simple contrôle sur les signes des différences entre les valeurs théoriques et mesurées permet de savoir si le processus est perturbé ou non par un temps mort. Appliquons comme illustration ce résultat aux fameuses mesures de Rutherford et Geiger de 1910, où le nombre  $F(k)$  d'observations de  $k$  scintillations provenant de particules alpha a été enregistré pour des intervalles de 7,5 s. Avec  $\bar{k} = 3,872$ , on obtient pour les valeurs "critiques"  $k_{-} \approx 2,3$  et  $k_{+} \approx 6,4$ . Le tableau 1 nous montre que la prévision des signes pour F-G est correcte pour 9 cas sur 10 (G est la fréquence attendue). Or, un tel résultat ne se produit par hasard qu'avec une probabilité de 1,1 %. Il paraît donc justifié de prendre les déviations observées pour systématiques et dues à l'influence d'un temps mort. De plus, celui-ci peut être évalué à  $\tau = (0,05 \pm 0,03)$  s, qui semble raisonnable comme temps de résolution pour l'oeil de l'observateur. En le reportant dans la formule pour la distribution corrigée  $W_{\mu}(k)$ , on obtient les valeurs  $G_1(k)$  données dans le tableau. Cette fois, les signes des différences F-G<sub>1</sub> ne sont prévus correctement que dans 5 des 11 cas, indiquant ainsi que les écarts résiduels sont aléatoires. En même temps, la quantité  $\chi^2$  est réduite de 12,9 à 10,0, ce qui correspond à une probabilité de 26 % (au lieu de 17 %). Il s'ensuit donc

que ces mesures, souvent citées comme bel exemple d'une distribution de Poisson, ne suivent pas exactement cette loi. Pour plus de détails on se référera au Rapport BIPM-72/10.

TABLEAU 1

Mise en évidence d'une déformation due au temps mort dans les mesures de Rutherford et Geiger à l'aide d'une comparaison des signes des résidus

	$F(k)$	$G_0(k) = N \cdot P_{\bar{k}}(k)$	$G_1(k) = N \cdot W_{\mu}(k)$	Signes des différences F-G		
				observés par F-G <sub>0</sub>	prévus	observés par F-G <sub>1</sub>
k=0	57	54	50	+	-	+
1	203	210	201	-	-	+
2	383	407	403	-	-	-
k <sub>-</sub>	.....					
3	525	525	532	(zéro)	+	-
4	532	508	520	+	+	+
5	408	394	402	+	+	+
6	273	254	256	+	+	+
k <sub>+</sub>	.....					
7	139	141	138	-	-	+
8	45	68	64	-	-	-
9	27	29	26	-	-	+
≥10	16	17	14	-	-	+

N = 2 608

b) Séparation expérimentale entre impulsions individuelles et paires

Considérons un processus qui se compose d'impulsions arrivant individuellement et d'autres qui apparaissent sous forme de paires. Celles-ci pourraient être représentées par des événements du type mère-fille ou par des impulsions suivies d'événements secondaires. Parmi les méthodes habituelles permettant de distinguer entre ces deux types, les unes sont fondées sur les différences dans la répartition des intervalles entre impulsions successives (mesurées à l'aide d'un convertisseur temps-amplitude), tandis que les autres tirent profit des changements apportés au rapport variance sur valeur moyenne des comptages.

Il nous semble qu'une autre possibilité de distinguer entre impulsions simples et doubles pourrait s'appuyer sur la parité de comptages répétés. Dans un intervalle de temps de durée  $t$  on enregistre  $k$  événements qui se composent de  $n_p$  paires et de  $n_s$  impulsions simples, d'où  $k = 2 n_p + n_s$ . La probabilité d'observer exactement  $k$  événements est donc

$$W(k) = \sum_j P_p(j) \cdot P_s(k-2j).$$

On peut montrer que les probabilités  $P_p$  et  $P_s$  suivent toujours une simple loi de Poisson si c'est le cas pour la série des événements originaux (sans impulsions secondaires), indépendamment de la répartition des intervalles à l'intérieur d'une paire d'impulsions mère-fille. En revanche, les valeurs moyennes  $\mu$  seront en général fonction de cette distribution. Ainsi, pour une distribution exponentielle (à intervalle moyen  $\lambda^{-1}$ ) on trouve pour le nombre moyen de paires dans  $t$

$$\mu_p = \rho t \cdot \epsilon_m \epsilon_f \left[ 1 - \frac{1}{\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) \right],$$

et pour les impulsions simples

$$\mu_s = \rho t \left\{ \epsilon_m + \epsilon_f - 2 \epsilon_m \epsilon_f \left[ 1 - \frac{1}{\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) \right] \right\},$$

où  $\epsilon_m$  et  $\epsilon_f$  sont les efficacités pour détecter une impulsion du type mère ou fille. Pour  $t \gg 1/\lambda$ , les taux de comptage approchent toujours les simples valeurs limites

$$\rho_p = \mu_p/t = \rho \cdot \epsilon_m \epsilon_f$$

et

$$\rho_s = \mu_s/t = \rho (\epsilon_m + \epsilon_f - 2 \epsilon_m \epsilon_f)$$

et l'on n'a plus besoin de connaître leur distribution exacte. Le dispositif de corrélateur décrit antérieurement (Rapport BIPM-70/6) mesure essentiellement les probabilités de trouver un nombre pair ou impair d'événements en fonction du temps de mesure  $t$ . Or, puisque la parité de  $k$  ne dépend pas du nombre de paires, une telle mesure permet d'en déduire directement  $\mu_s$ . Ainsi, pour un processus de Poisson, on a

$$\text{Prob. (k pair)} \equiv W(0 | 2) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \exp(-2 \rho_s t) \right]$$

et

$$\text{Prob. (k impair)} \equiv W(1 | 2) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \exp(-2 \rho_s t) \right].$$

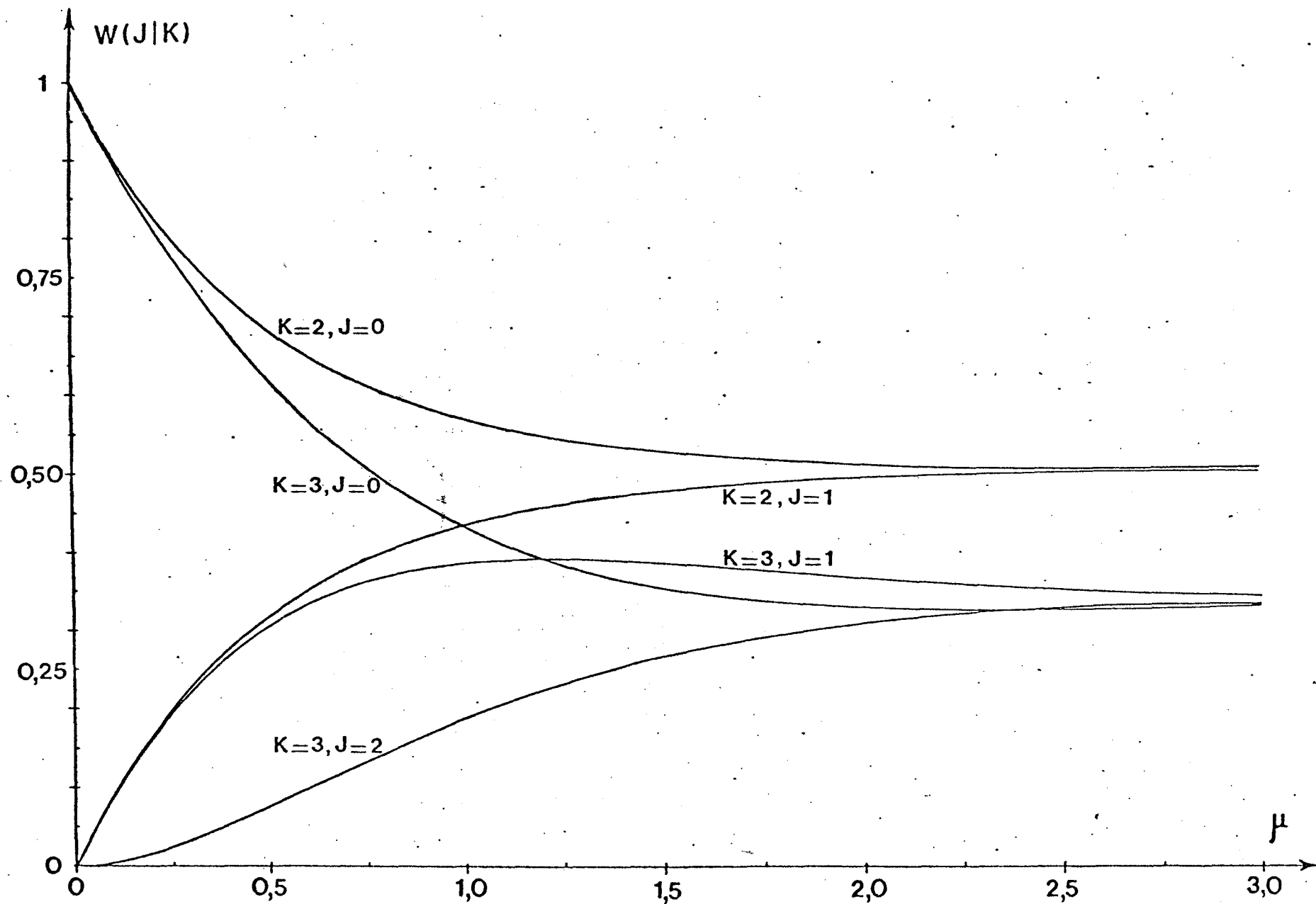


Fig. 1 - Distributions  $W(J|K) = \text{Prob. } \{k = J(\text{mod } K)\}$  pour  $K = 2$  et  $3$  en fonction de la valeur moyenne  $\mu = \rho t$ .

D'autre part, un comptage direct donne comme taux expérimental

$$\rho_{\text{exp}} = \rho(\varepsilon_m + \varepsilon_f) = \rho_s + 2\rho_p.$$

Une différence réelle entre la valeur  $\rho_s$  déduite à l'aide du corrélateur et  $\rho_{\text{exp}}$  permet donc de déterminer le taux des impulsions doublées.

Remarquons finalement que cette méthode peut être étendue au cas d'impulsions secondaires d'ordre multiple. Dans le cas général, au moyen d'un simple dispositif électronique, on détermine par comptage direct les fréquences

$$\text{Fréq. } \left\{ k = J \pmod{K} \right\} \equiv \Pi(J | K), \text{ avec } 0 \leq J < K,$$

en fonction du temps de mesure  $t$ . D'autre part, pour un processus de Poisson, les probabilités correspondantes peuvent aussi être calculées et l'on trouve

$$\text{Prob. } \left\{ k = J \pmod{K} \right\} \equiv W(J | K) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x_k^{-J} \cdot e^{\rho t (x_k - 1)},$$

où les  $x_k$  sont les  $K$  racines de l'équation  $x^K = 1$ . La figure 1 montre l'allure des probabilités  $W$  en fonction de la valeur moyenne  $\mu = \rho t$  pour  $K = 2$  et  $3$ .

Après avoir effectué une série de mesures pour des valeurs données de  $K$  et  $J$ , c'est de nouveau par comparaison des mesures  $\Pi$  avec la courbe théorique  $W$  que l'on détermine la valeur effective de  $\rho$  qui donne le meilleur accord. Par un choix judicieux du taux de comptage expérimental, on évitera d'être trop gêné par notre ignorance de la répartition exacte des intervalles entre les impulsions multiples, sans pour autant se rapprocher trop des valeurs limites  $1/K$  de  $W$  qui seraient dépourvues d'information utile concernant  $\rho$ .

Les fondements théoriques de cette nouvelle tentative sont décrits plus longuement dans les trois rapports BIPM-72/13, BIPM-72/14 et BIPM-73/5. Les résultats des mesures expérimentales, momentanément retardées par une amélioration importante du dispositif électronique, devraient bientôt nous permettre de mieux juger de l'intérêt pratique de cette méthode.

(Octobre 1973)