Effet dû à la décroissance pour un temps mort généralisé

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Il y a juste 25 ans que A.J. Axton et T.B. Ryves, du NPL, dans un article devenu célèbre entre temps (IJARI 14 (1963), p. 159), ont traité le problème des influences combinées sur le taux de comptage observable d'une source radioactive dues à la décroissance, le temps mort et un mouvement propre. En partant d'un taux originel donné par

$$\rho(t) = \rho_o \, e^{-\lambda t} + \rho_b ,$$

où ρ_o est le taux de comptage provenant de la source au début de la mesure ($t=0$), ρ_b le mouvement propre (supposé constant) et $1/\lambda$ la vie moyenne.

On détermine d'abord le taux $R(t)$ qui correspond à la sortie d'un temps mort imposé (de durée et type donnés). Puis il convient d'évaluer le taux moyen observé dans un intervalle de temps T, donc de l'intégrale

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \int_o^T R(t) \, dt .$$

Les auteurs ont réussi à obtenir des formules exactes pour $\bar{R}$ (valables pour $\lambda > 0$) qui correspondent aux deux types de temps morts traditionnellement considérés, et leur résultat est que

- pour un temps mort τ non étendu (n):

$$_n\bar{R} = \frac{1}{1 + x_b} \left\{ x_b + \frac{1}{\lambda T} \ln \left[\frac{1 + x_o + x_b}{1 + \Lambda x_o + x_b} \right] \right\} ,$$

- pour un temps mort τ étendu (e):

$$_e\bar{R} = \frac{e^{-x_b}}{\lambda T} \left\{ e^{-\Lambda x_o} - e^{-x_o} + x_b \left[E_1(\Lambda x_o) - E_1(x_o) \right] \right\} ,$$

où $x_o = \rho_o \tau$, $x_b = \rho_b \tau$, $\Lambda = e^{-\lambda T}$

et $E_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t} \, dt$ est l'intégrale exponentielle.

Dans la perspective des récents développements concernant les temps morts de type généralisé (décrits par les deux paramètres τ et $0 < \theta < 1$), il est tentant de voir si les anciens calculs peuvent être généralisés - bien que la forte dissemblance des deux résultats limites cités n'y encourage guère.

La tentative a néanmoins été faite et il semble que, après un effort non négligeable, le but envisagé ait pu être atteint. Le résultat ainsi obtenu peut s'écrire sous la forme

$$
{}_{\theta}\bar{R} = \alpha \left[\frac{x_o}{\lambda T}(1-\Lambda) + x_b\right] + \frac{\alpha}{\lambda T}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x_o)^n}{n!}\left[x_o\left(\frac{1-\Lambda^{n+1}}{n+1}\right) + x_b\left(\frac{1-\Lambda^n}{n}\right)\right]\sum_{k=1}^{n} k!\; S(n,k)\,(-\theta)^{n-k}\,\beta^k\right\}.
$$

Dans cette formule on a utilisé les abréviations

$$
\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{e^{\theta x_b} - 1}{\theta} \quad \text{et} \quad \beta = \alpha\, e^{\theta x_b},
$$

tandis que $S(n,k)$ désignent les nombres de Stirling de seconde espèce.

Il n'est guère surprenant que la dérivation de cette formule générale ne soit pas très commode; elle sera décrite dans un prochain rapport BIPM. Par contre, on aurait sans doute pensé que la spécialisation aux deux cas connus (pour $\theta = 0$ ou 1) serait évidente, mais même ceci demande une certaine habileté dans ce genre de calcul. La même remarque s'applique à la transition qui est nécessaire pour arriver à la limite $\lambda=0$ où la décroissance est négligeable. Tous ces contrôles ont été faits et mènent aux expressions attendues.

Le résultat obtenu pour ${}_{\theta}\bar{R}$ fait partie de nos efforts visant à donner un nouveau souffle aux corrections à appliquer aux comptages par l'utilisation de temps morts généralisés.

(Janvier 1988)