BIPM Working Party Note 229

A propos de deux temps morts en série

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

La description de deux temps morts arrangés en série donne facilement lieu à des formules compliquées [1] que l'on a tendance à éviter le plus possible. Dans ce qui suit nous nous proposons de présenter quelques relations qui peuvent surprendre par leur simplicité. On verra que ceci est dû en grande partie à l'emploi systématique de la notion de facteur de transmission qui permet d'alléger les expressions.

Commençons par un seul temps mort (Fig. 1), de durée τ_2; son type est supposé non étendu (n) ou étendu* (e). Pour tous les arrangements étudiés ici on admettra à l'entrée un processus de Poisson à taux ρ.

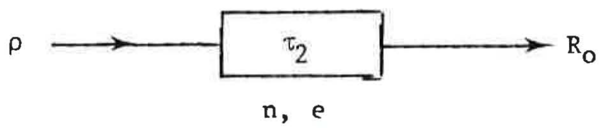

Figure 1 - Schéma et notation pour un temps mort

Le taux de comptage à la sortie est alors donné par l'expression bien connue

$$R_o = \rho \, T_2 , \tag{1a}$$

où le facteur de transmission est

$$T_2 = \begin{cases} T_n = \dfrac{1}{1 + x} , & \text{pour } \tau_2 \text{ du type n ,} \\ T_e = e^{-x} , & \text{" } \tau_2 \text{ " " e ,} \end{cases} \tag{1b}$$

avec l'abréviation $x = \rho \, \tau_2$.

---

* appelé aussi cumulatif

Notons que l'évaluation du taux originel ρ à partir de la valeur observée R_o n'est simple que si τ_2 est du type n. Dans ce cas on a

$$\rho = \frac{R_o}{1 - R_o\,\tau_2}, \tag{2}$$

d'où l'on tire pour T_n la nouvelle expression

$$T_n = 1 - R_o\,\tau_2 . \tag{3}$$

Pour le type étendu cette inversion est moins évidente. La formule exacte est connue [2], mais peu utilisée. On peut l'approcher par le développement en série

$$\rho = \frac{R_o}{1 - R_o\tau_2 - \frac{1}{2}(R_o\tau_2)^2 - \frac{2}{3}(R_o\tau_2)^3 - \frac{9}{8}(R_o\tau_2)^4 - \frac{32}{15}(R_o\tau_2)^5 - \dots} \tag{4a}$$

ou aussi par

$$\frac{\rho}{R_o} = 1 + R_o\tau_2 + \frac{3}{2}(R_o\tau_2)^2 + \frac{8}{3}(R_o\tau_2)^3 + \frac{125}{24}(R_o\tau_2)^4 + \frac{54}{5}(R_o\tau_2)^5 + \dots \tag{4b}$$

Pour un arrangement en série de deux temps morts (Fig. 2), le taux à la sortie du dispositif peut être exprimé par

$$R = \rho\,T_2\,T_1 = R_o\,T_1 , \tag{5}$$

où le facteur de transmission T_1 tient compte de l'influence additionnelle du premier temps mort τ_1. Cette manière de définir T_1 peut surprendre, mais se justifie par son utilité. Pour la quantité T_1 on trouve dans [1] soit des représentations graphiques (pour les arrangements "nn" et "ee"), soit des formules explicites (pour "ne" et "en") qui sont faciles à utiliser.

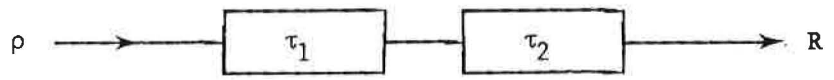

Figure 2 - Arrangement schématique de deux temps morts en série

La situation est particulièrement simple si τ_2 est du type n, car on a alors, avec (3),

$$R = \rho\,T_n\,T_1 = \rho(1 - R_o\,\tau_2)\,T_1 . \tag{6}$$

Il en découle pour le taux originel la relation assez surprenante

$$\rho = \frac{R}{(1 - R_o \tau_2)\, T_1} = \frac{R}{T_1 - R\, \tau_2} . \tag{7}$$

Une comparaison de cette formule avec (2) nous montre que, dans le cas d'un deuxième temps mort du type n, il suffit d'y remplacer 1 par T_1 pour tenir compte de façon rigoureuse de l'influence du premier temps mort. Cette formule, utilisée depuis plusieurs années dans nos programmes habituels, s'est montrée utile et fiable; nous l'avions mentionné au passage dans [3].

L'évaluation du facteur de transmission T_1 se simplifie beaucoup si le premier temps mort est suffisamment petit, ou plus exactement pour $\rho\, \tau_1 \ll 1$, car dans ce cas on peut montrer que

$$T_1 \cong 1 \pm \frac{1}{2} (\rho\, \tau_1)^2 , \tag{8}$$

où le signe positif (ou négatif) s'applique si τ_2 est du type e (ou n). Dans cette approximation la formule (8) ne dépend pas du type de τ_1.

On peut maintenant se poser la question de savoir s'il est possible d'arriver à un résultat analogue à celui qui est exprimé par (7) pour le cas où τ_2 est du type étendu. A première vue la réponse semble négative: alors que l'expression (2), en multipliant numérateur et dénominateur par T_1, donne directement (7), ceci n'est pas le cas pour (4a) où les termes d'ordre supérieur ne s'arrangent pas facilement. Or, avant d'accepter l'échec cherchons s'il n'existe pas, peut-être, quand même une petite échappatoire. Dans ce but considérons de nouveau le cas d'un seul temps mort étendu pour lequel, d'après (1), nous pouvons écrire $R_e = \rho\, T_e$. Essayons maintenent d'exprimer ce taux de comptage par une formule analogue à celle qui est valable pour un temps mort non étendu, en introduisant un facteur correctif désigné par T_c, c'est-à-dire en écrivant

$$R_e = \rho\, T_n\, T_c . \tag{9}$$

Il en résulte pour la correction que

$$T_c = T_e / T_n = e^{-x} (1 + x) . \tag{10}$$

Pour ce qui suit on peut supposer que T_c est connu. Pourtant, il convient de rappeler que x suppose la connaissance préalable de ρ, qui est en réalité la quantité recherchée. Notre approche nécessitera par conséquent des itérations, situation qui est analogue à celle que l'on rencontre dans l'évaluation de T_1. Il est évident que l'on aura intérêt à commencer avec une bonne approximation pour ρ, ce qui n'est pas trop difficile à faire dans les cas pratiques, par exemple à l'aide de (4).

Une comparaison de (9) avec (6) montre qu'il est donc possible, au moins sur un plan formel, d'exprimer l'effet d'un temps mort étendu sur le taux de comptage comme si l'on était en présence d'un arrangement en série de deux temps morts où le second est du type non étendu. Le rôle du facteur de transmission T_1, qui exprime l'influence d'un premier temps mort (ici purement fictif), est joué par le terme correctif T_c. On peut donc écrire

$$R_e = R_o \, T_c \, , \tag{11}$$

avec $R_o = \rho \, T_n$ et où T_c est donné par (10).

Il en résulte pour l'inversion, c'est-à-dire pour l'évaluation du taux originel, que l'on a, par analogie avec (7), la relation simple

$$\rho = \frac{R_o}{1 - R_o \, \tau_2} = \frac{R_e}{T_c - R_e \, \tau_2} \, . \tag{12}$$

Considérons maintenant une situation où il y a réellement un premier temps mort τ_1, responsable d'une influence supplémentaire sur le taux de comptage à la sortie du dispositif (Fig. 2) et décrit par le facteur de transmission T_1 introduit par (5). Le taux observé est alors

$$R = R_e \, T_1 = R_o \, T_c \, T_1 \, , \tag{13}$$

où T_1 est évalué à l'aide de formules connues [1].

Cependant, il se trouve maintenant que ρ reste facile à évaluer, car avec (11) et (12) on a

$$\rho = \frac{R_e \, T_1}{T_1 \, (T_c - R_e \, \tau_2)} = \frac{R}{T_1 \, T_c - R \, \tau_2} \, , \tag{14}$$

donc une formule qui est toujours du type (2) correspondant à un seul temps mort non étendu. De nouveau, une solution par itération s'imposera.

Cette observation devrait aider à élargir le domaine des applications pratiques d'un arrangement de deux temps morts en série car leur description, qui passait depuis longtemps pour trop compliquée, s'est maintenant révélée comme élémentaire.

Il est assez évident que cette approche pourrait aussi être appliquée à un deuxième temps mort de type généralisé [4], en remplaçant alors T_c par

$$T_c' = \frac{\theta \, (1 + x)}{e^{\theta x} + \theta - 1} \, , \tag{15}$$

où le nouveau paramètre θ, qui est entre 0 et 1, permet de faire le lien entre les deux types traditionnels. Cependant, pour un tel arrangement qui implique un temps mort généralisé on ne dispose pas encore de formules permettant d'évaluer le facteur T_1.

Nous tenons à remercier Mme M. Boutillon pour une lecture critique de cette note.

Références

[1] J.W. Müller: "Dead-time problems", Nucl. Instr. and Meth. 112, 47-57 (1973), section 8

[2] id.: "Deux nouvelles expressions concernant un temps mort cumulatif", BIPM WPN-217 (1980)

[3] id.: "Perturbation produite par une fenêtre spectrale", BIPM WPN-219 (1981)

[4] id.: "Inversion of the Takács formula", Rapport BIPM-84/3 (1984), eq. 1

(Janvier 1986)