Détermination numérique du taux originel pour un temps mort généralisé

par P. Bréonce et J. W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

1. Introduction

Pour un processus de Poisson, qui est caractérisé par le taux de comptage ρ, l'insertion d'un temps mort du type généralisé (décrit par les paramètres τ et θ) produit des pertes telles que le taux de comptage R à la sortie est donné par la formule dite de Takács (voir p. ex. [1])

$$R = \frac{\theta\rho}{e^{\theta\rho\tau} + \theta - 1}, \tag{1}$$

avec $\rho > 0$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Pour le cas limite $\theta = 0$, donc pour un temps mort du type non étendu, on trouve

$$R = \frac{\rho}{1 + \rho\tau} \tag{2a}$$

et l'on vérifie aisément la formule "inverse"

$$\rho = \frac{R}{1 - R\tau} \tag{2b}$$

qui correspond à la situation habituelle où l'on connaît R (et τ) expérimentalement, mais où l'on souhaite déterminer ρ.

Le même problème se pose évidemment aussi pour (1) si $\theta > 0$. Ce cas est nettement plus compliqué. En principe, il y a alors toujours deux solutions, appelées ici ρ_1 et $\rho_2 \geqslant \rho_1$, qui correspondent (pour des paramètres τ et θ fixes) à la même valeur mesurée R. Il est vrai que le plus souvent on ne s'intéresse qu'à ρ_1 (qui correspond à des pertes moins importantes), mais il arrive qu'on peut également se trouver dans une situation où le résultat recherché est ρ_2.

Une solution analytique permettant de trouver ρ_1 (ou plutôt $x = \rho_1\tau$) a été décrite récemment [1]. Or cette approche, bien que correcte, est surtout d'intérêt théorique, car elle fait appel aux nombres de Stirling de deuxième espèce dont l'évaluation pratique pour un ordre élevé peut poser quelques problèmes. De plus, on ne dispose d'aucun élément utile pour évaluer la deuxième solution ρ_2.

Pour remédier à cet inconvénient, et en tenant compte du fait que le plus souvent on s'intéresse seulement aux valeurs numériques, nous esquissons dans ce qui suit une approche qui se sert d'un algorithme itératif facile à programmer pour un ordinateur ou même pour un calculateur de poche.

2. Description de l'algorithme utilisé

Nous supposons que nous disposons des valeurs R, τ et $\theta > 0$. Celles-ci peuvent provenir de mesures pratiques ou d'hypothèses; dans le dernier cas il convient, cependant, de s'assurer que les valeurs admises ne sont pas contradictoires. Dans ce contexte, on se rappellera que le domaine accessible aux valeurs $z = R\tau$ est délimité par la courbe qui correspond à θ dans la Figure 1 de [1].

a) Première solution ρ_1

On détermine, par itérations, pour ρ_1 les approximations successives r_1, r_2, r_3, ... à l'aide de la formule

$$r_j = \frac{R}{\theta}\left(e^{\theta r'_j \tau} + \theta - 1\right), \qquad \text{avec } j = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Comme valeur de départ, on peut utiliser $r'_1 = R$.

En insérant à chaque tour j le résultat précédent, donc $r'_j = r_{j-1}$, l'itération est poursuivie jusqu'à ce qu'on trouve

$$|r_j - r'_j| < \varepsilon , \tag{4}$$

en choisissant, par exemple, $\varepsilon = 0{,}1\ s^{-1}$. Si (4) est satisfait après n_1 tours, on peut prendre pour valeur de la première solution

$$\rho_1 \cong r_{n_1}.$$

b) Seconde solution ρ_2

On peut utiliser la même formule de récurrence (3) que pour la première solution, mais cette fois on posera

$$r'_j = r'_{j-1} + (r'_{j-1} - r_{j-1})/c_1 . \tag{5}$$

Comment faut-il choisir la valeur de départ r'_1? Si la première solution est connue, il suffit de partir (un peu) au-delà de sa valeur, c'est-à-dire avec

$$r'_1 = c_2\, \rho_1 . \tag{6a}$$

Par contre, si ρ_1 n'est pas disponible, il conviendra de prendre une valeur de départ qui se situe au-delà de l'endroit où R atteint son maximum. La position exacte de ce maximum résulte comme solution d'une équation transcendante (éq. (6) dans [1]). Dans notre cas, une simple approximation est suffisante et l'on peut donc, par exemple, utiliser l'expression

$$x_{max} \cong \frac{2}{1+\theta} + \frac{(1-\theta)^2}{\sqrt{\theta}} .$$

Ceci permet de proposer comme valeur de départ

$$r_1' = c_2 \, x_{max}/\tau . \tag{6b}$$

Comme auparavant, l'itération est poursuivie jusqu'à ce que (4) soit satisfait (après n_2 tours), et l'on prendra alors comme seconde solution

$$\rho_2 \cong r_{n_2} .$$

De multiples essais ont permis de conclure que l'on peut, par exemple, choisir $c_1 = c_2 = 1,5$. Ce simple choix n'est, en général, pas optimal en ce qui concerne la durée du calcul (nombre d'itérations), mais il s'est révélé fiable.

Ce procédé numérique nous permet donc de déterminer pour tous les cas pratiques, à partir du taux de comptage R observé à la sortie d'un temps mort généralisé, les deux taux originels possibles, ρ_1 et ρ_2, si la durée τ du temps mort et son paramètre θ sont connus. La vérification des deux solutions trouvées est facile, car leur insertion dans (1) doit donner la valeur de départ R.

Pour le cas spécial $\theta = 0$, on utilisera la formule (2b).

Référence

[1] J.W. Müller: "Inversion of the Takács formula", Rapport BIPM-84/3 (1984)

(Novembre 1984)