Sur l'utilité d'un temps mort généralisé

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

En explorant les possibilités limites de l'équipement électronique utilisé pour la méthode d'échantillonnage sélectif, il est vite apparu que l'on doit tenir compte pour la voie bêta, à des taux de comptage élevés, des distorsions que subissent ces impulsions dans le compteur proportionnel et dans la chaîne électronique consécutive.

Faute de mieux, on a essayé de décrire l'ensemble des déformations apportées comme étant dû à un "premier" temps mort τ_1, et il a été possible de trouver une approche expérimentale permettant de déterminer la valeur numérique de τ_1 pour notre dispositif électronique. On n'était pas trop surpris de voir qu'elle dépend fortement du type que l'on attribue au temps mort. Restait toujours l'espoir que pour l'un ou l'autre type cette valeur serait constante, c'est-à-dire indépendante du taux de la source, mais malheureusement il ne s'est pas réalisé. Ce que P. Bréonce a vraiment trouvé est esquissé dans la figure 1.

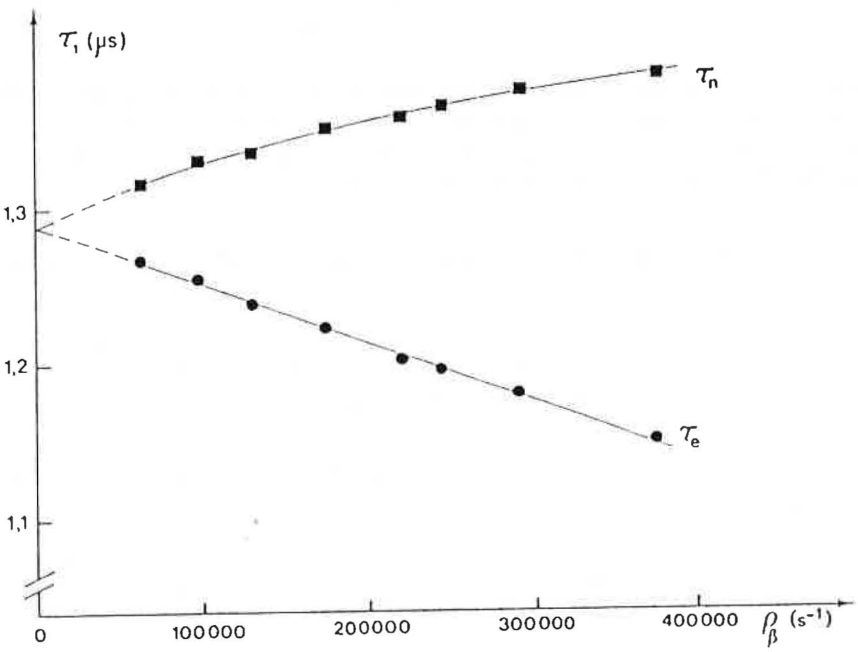

Figure 1 - Comportement de la valeur déduite pour le premier temps mort τ_1 de notre appareillage, supposé du type étendu (e) ou non étendu (n).

Il s'ensuit que, pour sauver le modèle adopté, on est obligé d'attribuer à τ_1 un comportement qui semble "intermédiaire" par rapport aux deux types de temps morts habituellement considérés. Mais sera-t-il alors possible de le décrire de façon précise et utile? Il arrive qu'une telle généralisation a été proposée, il y a une trentaine d'années déjà, par Albert et Nelson. Ces auteurs admettent que l'arrivée d'une impulsion détectée, mais non comptée, ne prolonge pas toujours le temps mort en cours, mais seulement avec une probabilité de $0 < \theta < 1$. Pour les cas limites on retrouve ainsi les types habituels, car $\theta = 0$ correspond au type non étendu, tandis que $\theta = 1$ équivaut au type étendu.

L'utilisation de ce modèle n'est cependant pas aisée, et nous ne connaissons qu'un seul auteur qui l'ait repris et développé. Parmi ses résultats, dont la majorité ne semble que d'un intérêt mathématique, il y a aussi quelques-uns qui pourraient être d'utilité pratique. Nous proposons dans ce qui suit une première application qui nous permettra de mieux comprendre les observations décrites dans la figure 1.

Dans son petit livre intitulé "Stochastic Processes" (Methuen, Londres, 1960), L. Takács a rassemblé un grand nombre de problèmes mathématiques et a - fort heureusement - indiqué leurs solutions. Ainsi, on trouve (à la page 117), pour le premier moment de la densité des intervalles t entre impulsions successives, qui ont passé par un tel temps mort généralisé, l'expression (dans la présente notation)

$$m_1(t) = \frac{e^{\theta\rho\tau_1} + \theta - 1}{\theta\rho} ,$$

où ρ est le taux de comptage du processus originel, supposé Poissonnien, et τ_1 est la valeur du temps mort imposé dans la séquence. La constante θ désigne la probabilité mentionnée plus haut. Le taux de comptage à la sortie du dispositif est donc $R = 1/m_1(t)$.

Vérifions d'abord si l'on retrouve pour les deux cas limites les résultats connus.

Pour $\theta = 1$, on arrive sans difficulté à $R_e = \rho\, e^{-\rho\tau_e}$, formule attendue pour un temps mort τ_e du type étendu.

Pour $\theta = 0$, il faut (pour éviter l'expression 0/0) développer l'exponentielle, d'où

$$R_n = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{\theta\rho}{1 + \theta\rho\tau_n + \ldots + \theta - 1}\right] = \frac{\rho}{1 + \rho\tau_n} ,$$

ce qui est le résultat connu pour τ_n non étendu.

Est-il possible aussi de tirer parti des cas intermédiaires? Pour notre problème la réponse est oui. Pour les mesures représentées dans la figure 1, il nous fallait supposer le type de τ_1 connu. Faisons maintenant la même chose en admettant que le comportement réel du temps mort τ_1 soit décrit par le modèle d'Albert et Nelson.

Si l'on interprète le taux de comptage observé

$$R = \frac{\theta\rho}{e^{\tau\rho\tau_1} + \theta - 1}$$

comme dû à un temps mort τ_n du type non étendu, en identifiant donc R avec R_n, on obtient une équation d'où l'on tire

$$\tau_n = \frac{e^{\theta\rho\tau_1} - 1}{\theta\rho} \cong \tau_1(1 + \frac{\theta}{2}\,\rho\tau_1).$$

De façon analogue, en supposant le premier temps mort du type étendu, τ_e, on arrive avec $R = R_e$ à une équation dont un développement en série permet d'obtenir en première approximation

$$\tau_e \cong \tau_1(1 - \frac{\theta'}{2}\,\rho\tau_1),$$

où l'on a posé $1 - \theta = \theta'$.

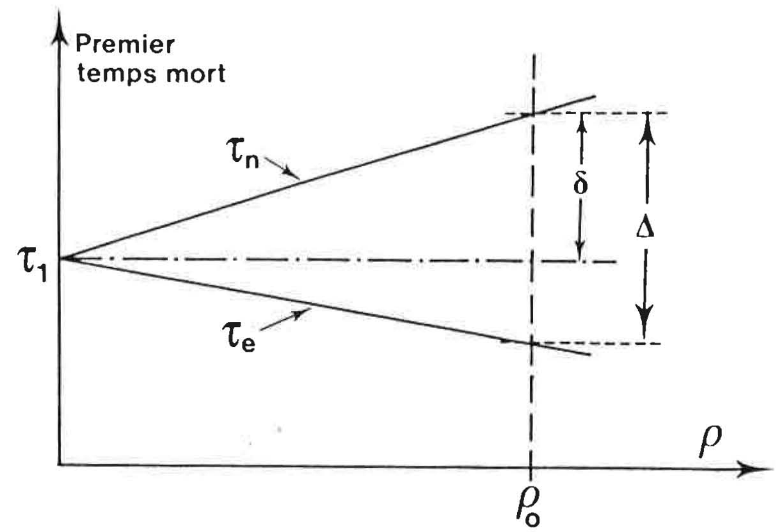

Figure 2 - Représentation schématique des résultats de la mesure d'un temps mort τ_1 du type général d'Albert et Nelson que l'on interprète comme s'il suivait un des deux types habituels. Dans cette approximation on a $\delta = \rho_o\tau_1^2/2$ et $\Delta = \rho_o\tau_1^2/2$.

L'application du modèle d'Albert et Nelson nous amène donc à attendre pour la mesure du premier temps mort le comportement esquissé dans la figure 2. La forte ressemblance entre cette prévision et le résultat expérimental de la figure 1 met en évidence l'utilité pratique de ce modèle d'un temps mort généralisé, et pour notre équipement on peut en déduire que $\theta = \delta/\Delta \cong 0,5$.

Mentionnons, pour terminer, qu'une autre approche du problème d'un temps mort généralisé pourrait également être envisagée; elle consisterait à tirer parti des propriétés que présente un arrangement de deux temps morts en série. En particulier, on peut montrer que les deux combinaisons où les éléments sont de types différents correspondent bien au cas général où θ ou θ' sont petits, paramètres qui s'identifient alors à α^2, si α désigne, comme d'habitude, le rapport des deux temps morts en série.

Une description plus détaillée de ces relations, qui sont parfois assez inattendues, est prévue.

(Février 1984)