Quelques remarques sur une "double" distribution de Poisson

by Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

La simple loi de Poisson

$$f_x = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} , \qquad \text{avec} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{et} \quad \lambda = E(x) > 0 , \tag{1}$$

a donné lieu à un grand nombre de généralisations. Une possibilité intéressante consiste à associer à chacun des x "événements" un nombre entier y qui suit également une loi de Poisson, mais dont l'espérance mathématique est $E(y) = \mu$. On considère alors la somme

$$n = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_x , \tag{2}$$

où n est la nouvelle variable aléatoire pour laquelle on cherche à connaître les probabilités p_n. Si l'on prend les événements x comme des "mères" dont chacune donne naissance à y "filles", n correspond à l'ensemble de la génération des "filles".

On traite habituellement ce type de problèmes en utilisant des fonctions génératrices. Ainsi, par exemple pour (1), celle-ci est définie par ($|s| \leqslant 1$)

$$F(s) \equiv \sum_{x=0}^{\infty} f_x \, s^x = e^{-\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} s^x = e^{\lambda(s-1)} , \tag{3}$$

et, de façon analogue, on a pour y

$$G(s) = e^{-\mu} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!} s^y = e^{\mu(s-1)} .$$

On sait [1] que pour un processus "composé" à la manière de (2), pour lequel nous cherchons les probabilités p_n, la fonction génératrice est donnée par

$$P(s) = F[G(s)] . \tag{4}$$

Dans notre cas, où x et y suivent des distributions de Poisson, on obtient

$$P(s) = \exp\{\lambda[e^{\mu(s-1)} - 1]\} . \tag{5}$$

Il est facile de voir qu'il existe des relations entre les moments d'une variable aléatoire et les dérivées de sa fonction caractéristique. Ainsi, on trouve à l'aide de (3) que

$$F'(s) = \frac{dF}{ds} = \sum_{x=0}^{\infty} f_x \, x \, s^{x-1} \;, \qquad \text{d'où}$$

$$F'(1) = \sum_{0}^{\infty} x \, f_x = E(x) \;.$$

De façon générale, on peut obtenir ainsi le moment factoriel d'ordre r d'une variable entière x, défini par

$$M_r(x) \equiv E\{x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\,(x-r+1)\} \;, \tag{6}$$

à l'aide de

$$M_r(x) = F^{(r)}(1) \;. \tag{7}$$

Le passage aux moments ordinaires $m_r(x) \equiv E(x^r)$ s'effectue à l'aide de coefficients (voir par exemple [2]) connus sous le nom de nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$, car

$$m_r(x) = \sum_{j=1}^{r} S(r,j)\, M_j(x) \;. \tag{8}$$

En particulier, on obtient pour la loi de Poisson (1) une expression très simple

$$M_r(x) = \lambda^r \;, \qquad r = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \;, \tag{9}$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (8), les premiers moments de x

$$\begin{aligned} m_1(x) &= M_1(x) &&= \lambda \;, \\ m_2(x) &= M_1(x) + M_2(x) &&= \lambda(1+\lambda) \;, \\ m_3(x) &= M_1(x) + 3M_2(x) + M_3(x) &&= \lambda(1 + 3\lambda + \lambda^2) \;. \end{aligned} \tag{10}$$

Pour les moments centrés $\mu_r \equiv E(x - m_1)^r$, cela correspond à la relation bien connue

$$\mu_2(x) = \mu_3(x) = \lambda \;. \tag{11}$$

Il est possible d'obtenir par un procédé semblable les moments pour la variable aléatoire n dont la fonction génératrice est donnée par (5). Puisque les calculs sont un peu plus fastidieux, nous nous bornons à en donner les résultats qui sont

$$m_1(n) = \lambda\mu \ ,$$
$$\mu_2(n) = \lambda\mu(1 + \mu) \ , \tag{12}$$
$$\mu_3(n) = \lambda\mu(1 + 3\mu + \mu^2) \ .$$

Il est intéressant de noter que toutes ces expressions pour les moments (qui ne sont pas nouvelles) s'obtiennent sans connaissance préalable d'une formule explicite pour la probabilité p_n d'observer exactement n événements du processus (2). Or, celle-ci peut également être déterminée à l'aide de dérivées de la fonction génératrice P(s), car il résulte de sa définition que

$$p_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n P(s)}{ds^n} \right|_{s=0} = \frac{1}{n!} P^{(n)}(0) \ . \tag{13}$$

Cette relation permet d'établir, pour p_o, p_1, p_2, etc., des expressions à l'aide desquelles il est possible d'arriver à la formule générale

$$p_n = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\lambda+\theta} \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\ \theta^k \ , \qquad \text{avec } \theta \equiv \lambda\ e^{-\mu} \ , \tag{14}$$

dont la validité peut être prouvée par induction. Les coefficients qui y apparaissent sont de nouveau des nombres de Stirling.

En tenant compte de (8) et (9), la relation (14) peut aussi être exprimée de façon plus condensée par

$$p_n = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\lambda+\theta}\ {}_\theta m_n \ , \tag{15}$$

où ${}_\theta m_n$ est le moment d'ordre n pour une variable qui suit la loi de Poisson avec une valeur moyenne de $\theta = \lambda\ e^{-\mu}$.

On peut montrer que (14) s'approche d'une distribution de Poisson, avec $E(n) = \nu$, si $\lambda \to \infty$ et $\mu \to 0$, le produit $\lambda\mu = \nu$ restant fini.

L'essentiel de l'étude présentée dans cette note est exprimé par les formules (14) et (15).

En vue d'éventuelles applications à quelques problèmes de comptage, il nous semble intéressant, cependant, de considérer aussi une petite modification du processus décrit par (2). En effet, l'identification des événements x avec des impulsions primaires, et des y avec des impulsions secondaires (ou multiples), nous amène à étudier (voir aussi [3]) la distribution qui décrit l'ensemble des événements x et y, c'est-à-dire de la variable

$$N = \sum_{j=1}^{x} (1 + y_j) = x + n \,, \tag{16}$$

où n est donné par (2). On s'intéresse alors en particulier au cas où $\mu \ll \lambda$, puisque n/x, contribution relative des impulsions secondaires, peut en général être supposé très faible. Pour la limite $\mu \to 0$ on retrouve la distribution de Poisson.

Par une approche semblable à celle qui est esquissée plus haut, on arrive à des relations analogues, mais pas identiques. Ainsi, on obtient par exemple pour les premiers moments de N

$$\begin{aligned} m_1(N) &= \lambda(1 + \mu) \,, \\ \mu_2(N) &= \lambda(1 + 3\mu + \mu^2) \,, \\ \mu_3(N) &= \lambda(1 + 7\mu + 6\mu^2 + \mu^3) \,. \end{aligned} \tag{17}$$

On se propose de revenir sur ce sujet et de l'approfondir.

Références

[1] W. Feller: "An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I" (Wiley, New York, 1957 2)

[2] J. Riordan: "An Introduction to Combinatorial Analysis" (Wiley, New York, 1958)

[3] M.C. Teich: "Role of the doubly stochastic Neyman type-A and Thomas counting distributions in photon detection", Applied Optics 20, 2457 (1981)

(Octobre 1982)