

Remarque sur une formule de Ruark et Devol

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

L'approche rigoureuse, faite il y a longtemps par Ruark et Devol\* (= RD), pour décrire la statistique de comptage d'une source radioactive décroissante, reste d'un intérêt indéniable, bien qu'elle n'ait guère donné lieu à des applications pratiques. Puisqu'on peut supposer que ce fait est aussi dû à la complexité des formules présentées, il peut être justifié d'indiquer des formes simplifiées pour quelques-uns de leurs résultats.

Avec la notation

$W_n(0, t)$  = probabilité pour  $n$  désintégrations dans l'intervalle de temps de 0 à  $t$  et

$f_n(t) dt$  = probabilité pour une désintégration entre  $t$  et  $t+dt$ , s'il y en a eu  $n$  de 0 à  $t$ ,

on établit, en utilisant la propriété de Markov, que

$$W_n(0, t+dt) = W_{n-1}(0, t) \cdot f_{n-1}(t) dt + W_n(0, t) \cdot [1 - f_n(t) dt],$$

d'où découle l'équation différentielle (pour  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\frac{dW_n(0, t)}{dt} = f_{n-1}(t) \cdot W_{n-1}(0, t) - f_n(t) \cdot W_n(0, t). \quad (1) = \text{RD 2}$$

Une solution générale est possible sous forme récursive. Notons que si  $f_n(t)$  ne dépend que du temps  $t$ , la solution peut être écrite sous la forme bien connue d'une loi de Poisson, où le seul paramètre est donné, pour un intervalle de temps qui va de  $t_1$  à  $t_2$ , par

$$\mu = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

---

\* A. Ruark, L. Devol, Physical Review 49, 355-367 (1936)

Le cas d'une source décroissante est d'un intérêt particulier. Si la source radioactive consiste en  $N$  atomes à l'origine  $t = 0$ , dont  $n$  se sont désintégrés dans  $t$ , la fonction  $f_n(t)$  ne dépend plus du temps et prend la forme

$$f_n = (N - n) \lambda . \quad (2) = \text{RD } 9$$

La constante de décroissance  $\lambda$  est la probabilité de désintégration pour un atome par unité de temps.

Dans ce cas on a comme solution de (1)

$$W_n(0, t) = \binom{N}{n} (e^{\lambda t} - 1)^n \cdot e^{-N\lambda t} . \quad (3) = \text{RD } 10$$

Si l'intervalle d'observation est de durée  $T_2$  et commence à  $T_1$ , la probabilité pour  $n$  désintégrations, en supposant que  $s$  événements se sont produits dans  $T_1$ , est par analogie

$$W_{s,n}(T_1, T_1+T_2) = \binom{N-s}{n} (e^{\lambda T_2} - 1)^n \cdot e^{-(N-s)\lambda T_2} . \quad (4) = \text{RD } 11$$

Si l'on ignore ce qui s'est passé dans  $T_1$ , on obtient par élimination de  $s$

$$\begin{aligned} W_n(T_1, T_1+T_2) &= \sum_{s=0}^{N-n} W_s(0, T_1) \cdot W_{s,n}(T_1, T_1+T_2) \\ &= \binom{N}{n} (e^{\lambda T_2} - 1)^n \cdot e^{-N\lambda(T_1+T_2)} \left[ 1 + e^{\lambda T_2} (e^{\lambda T_1} - 1) \right]^{N-n} . \end{aligned} \quad (5) = \text{RD } 12$$

Pour passer des désintégrations aux impulsions enregistrées, RD supposent un angle solide  $A$  et une efficacité  $g$  du compteur. La probabilité d'enregistrer  $k$  des  $n$  particules émises est donc donnée par

$$\bar{\pi}(k|n) = \binom{n}{k} (gA)^k (1 - gA)^{n-k} , \quad 0 \leq k \leq n . \quad (6) = \text{RD } 14$$

Par conséquent, la chance d'observer  $k$  événements dans  $T_2$  s'obtient à l'aide de l'expression

$$P_k(T_1, T_1+T_2) = \sum_{n=k}^N W_n(T_1, T_1+T_2) \cdot \bar{\pi}(k|n) . \quad (7) = \text{RD } 15$$

Les auteurs parviennent à évaluer cette expression et indiquent comme résultat

$$\begin{aligned} P_k(T_1, T_1+T_2) &= \binom{N}{k} e^{-N\lambda(T_1+T_2)} \cdot (e^{\lambda T_2} - 1)^k (gA)^k \\ &\cdot \left[ 1 + e^{\lambda T_2} (e^{\lambda T_1} - 1) + (1 - gA) (e^{\lambda T_2} - 1) \right]^{N-k} . \end{aligned} \quad (8) = \text{RD } 16$$

Cette expression généralise (5), formule que l'on retrouve pour  $gA = 1$ .

Or, vu la simplicité du problème on est un peu étonné par la complexité de (8) et on peut se demander si une simplification ne serait pas possible.

Dans ce but, changeons d'abord la notation pour le temps. Pour une subdivision régulière, l'intervalle numéro  $j$  va de  $(j-1)t_0$  jusqu'à  $jt_0$ . Cela revient à poser  $T_1 = (j-1)t_0$  et  $T_2 = jt_0$ . Mettons aussi

$$p \equiv 1 - q = 1 - e^{-\lambda t_0} \quad (9)$$

pour la probabilité qu'un atome se désintègre dans  $t_0$ . Il est maintenant facile de déduire directement une équation qui corresponde à (8). Pour enregistrer une impulsion dans l'intervalle  $j$ , les conditions suivantes doivent être remplies à la fois: il faut pour un atome donné

- qu'il se désintègre dans l'intervalle  $j$ ,
- qu'il ne se soit pas désintégré dans un des  $(j-1)$  intervalles précédents et
- que l'événement correspondant soit détecté.

L'ensemble de ces conditions correspond, pour l'intervalle  $j$ , à une probabilité

$$P_j = \varepsilon p q^{j-1} = gA (1 - e^{-\lambda t_0}) e^{-(j-1)\lambda t_0}, \quad (10)$$

où l'on a posé  $gA = \varepsilon$ .

Par conséquent, la probabilité d'observer  $k_j$  impulsions dans l'intervalle  $j$  (de durée  $t_0$ ), si la source consiste en  $N$  atomes au début du premier intervalle, est donnée par

$$P(k_j) = \binom{N}{k_j} P_j^{k_j} (1 - P_j)^{N-k_j}. \quad (11)$$

A l'aide de quelques réarrangements élémentaires, on vérifie en effet que (11) et (8) sont identiques. Cependant, la nouvelle forme (11) montre plus clairement qu'il s'agit toujours d'une loi binomiale, et ce fait permet d'écrire pour la valeur moyenne et la variance du nombre  $k_j$  d'impulsions enregistrées dans l'intervalle  $j$

$$E(k_j) = N P_j \quad \text{et} \quad V(k_j) = N P_j (1 - P_j). \quad (12) = \text{RD 18}$$

Pour le rapport dit le Lexis, on a donc

$$L_j \equiv V(k_j)/E(k_j) = 1 - P_j, \quad (13)$$

valeur qui est toujours inférieure à l'unité. Ceci montre que le processus n'est plus exactement du type de Poisson.

En ce qui concerne d'éventuelles applications expérimentales des formules que nous livre l'approche de Ruark et Devol, il est difficile de cacher quelques obstacles sérieux. Un premier problème est posé par la nécessité de connaître  $N$ , le nombre d'atomes à  $t = 0$ . Même si l'on peut, pour des situations particulières, supposer connaître  $N$  après la désintégration complète d'une source microscopique, il semble exclu de rétablir les mêmes conditions initiales pour d'autres mesures, comme il serait nécessaire pour une étude expérimentale des propriétés statistiques d'une grandeur comme  $k_j$ , dont le comportement théorique est décrit par (11). D'autre part, si l'on observe la décroissance d'une source donnée pendant une série d'intervalles de temps consécutifs, on obtient des valeurs numériques pour  $k_1, k_2, \dots$ ; or la formule (11) ne peut s'appliquer rigoureusement qu'au premier intervalle, car à partir de  $j = 2$  elle suppose l'absence de toute information sur ce qui s'est passé auparavant, comme la dérivation de (5) le montre clairement, où l'on a moyenné sur toutes les valeurs possibles de  $s$ . Dans une telle mesure, par contre, on disposerait d'informations supplémentaires sous forme des résultats  $k_1$  à  $k_{j-1}$ .

L'application directe de la théorie de Ruark et Devol à une expérience nous semble par conséquent prématurée. Elle demandera l'élaboration préalable d'une approche plus générale du problème qui tienne compte de la situation expérimentale réelle. Une telle étude, qui s'annonce difficile, ne se limiterait pas nécessairement aux comptages, mais pourrait aussi bien porter sur la répartition des intervalles de temps entre impulsions observées.

(Octobre 1980)