

Premiers moments pour une source décroissante avec temps mort cumulatif

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

Parmi les problèmes relatifs à la mesure d'une source, effectuée pendant un temps total T sur un grand nombre de durées fixes t_0 (donc par échantillonnage), nous avons déjà traité le cas où les émissions de cette source, pour laquelle on admet une décroissance exponentielle à vie moyenne $1/\lambda$, sont superposées d'un mouvement propre constant (à taux β) et où le dispositif de mesure introduit un temps mort τ . Contrairement à l'hypothèse utilisée précédemment d'un temps mort du type non cumulatif (voir BIPM WPN-212), celui-ci sera maintenant considéré comme cumulatif. On se contentera d'esquisser les raisonnements qui mènent aux résultats indiqués.

A tout moment t l'espérance momentanée du nombre k d'événements enregistrés dans t_0 est

$$E_t(k) = \rho(t) \cdot t_0 ,$$

où le taux de comptage observé est donné par l'expression

$$\rho(t) = (\beta + \rho_0 \cdot e^{-\lambda t}) \cdot \exp \left[-(\beta + \rho_0 \cdot e^{-\lambda t}) \tau \right] ,$$

avec ρ_0 = taux de comptage non perturbé à $t = 0$, donc sans mouvement propre ni temps mort.

Pour l'ensemble de l'intervalle d'observation T , l'espérance de k est la moyenne

$$\begin{aligned} \lambda E(k) &= \frac{1}{T} \int_0^T E_t(k) dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \beta t_0 \cdot e^{-\beta \tau} \int_0^T \exp \left[-\rho_0 \tau \cdot e^{-\lambda t} \right] dt + \rho_0 t_0 \int_0^T e^{-\lambda t} \cdot e^{-\beta \tau} \cdot \exp(-\rho_0 \tau \cdot e^{-\lambda t}) dt \right\} . \end{aligned}$$

En utilisant les symboles

$$\mu_0 = \rho_0 t_0, \quad b = \rho_0 \tau, \quad g = \beta t_0 \quad \text{et} \quad \eta = e^{-\beta \tau},$$

cette espérance prend la forme

$$E(k) = \frac{g \eta}{T} \cdot J_1(b) + \frac{\mu_0 \eta}{T} \cdot J_2(1, b),$$

où J_1 et J_2 désignant les intégrales

$$J_1(b) \equiv \int_0^T \exp(-b \cdot e^{-\lambda t}) dt$$

$$\text{et} \quad J_2(\alpha, b) \equiv \int_0^T \exp(-\alpha \cdot \lambda t - b \cdot e^{-\lambda t}) dt.$$

L'évaluation de ces intégrales donne, avec $B = b \cdot e^{-\lambda T}$,

$$J_1(b) = \frac{1}{\lambda} \left\{ E_1(B) - E_1(b) \right\} \quad \text{et}$$

$$J_2(\alpha, b) = \frac{1}{\lambda \cdot b^\alpha} \left\{ \gamma(\alpha, b) - \gamma(\alpha, B) \right\},$$

où E_1 et γ sont respectivement la fonction exponentielle intégrale et la fonction gamma incomplète que nous avons rencontrées auparavant. Par conséquent, on peut aussi indiquer pour l'espérance mathématique de k la forme plus explicite (pour $\lambda \neq 0$ et $\tau \neq 0$)

$$\lambda E(k) = \frac{g \eta}{\lambda T} \left\{ E_1(B) - E_1(b) \right\} + \frac{\mu_0 \eta}{b \lambda T} \left\{ \gamma(1, b) - \gamma(1, B) \right\}.$$

L'évaluation de la variance de k est un peu plus longue, comme d'habitude. Nous nous contenterons de déterminer sa valeur asymptotique qui est, en bonne approximation (voir par exemple Rapport BIPM-77/1, Table 4), pour un temps mort τ cumulatif

$$V_t(k) = \rho_t \cdot t_0 \cdot \frac{e^{\rho_t \tau} - 2 \rho_t \tau}{e^{2 \rho_t \tau}},$$

où ρ_t est le taux de comptage avant le temps mort, donc

$$\rho_t = \beta + \rho_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

En insérant p_t on obtient, après quelques transformations,

$$V_t(k) = g \left\{ \eta \cdot \exp(-\tilde{b}) - 2 \eta^2 \beta \tau \cdot \exp(-2\tilde{b}) - 2 \eta^2 b \cdot \exp(-\lambda t - 2\tilde{b}) \right\} \\ + \mu_o \left\{ \eta \cdot \exp(-\lambda t - \tilde{b}) - 2 \eta^2 \beta \tau \cdot \exp(-\lambda t - 2\tilde{b}) - 2 \eta^2 b \cdot \exp(-2\lambda t - 2\tilde{b}) \right\},$$

avec $\tilde{b} = b \cdot e^{-\lambda t}$.

Comme précédemment, l'intégration sur la durée T s'effectue pour la variance à l'aide de la formule

$$\lambda V(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ V_t(k) + E_t^2(k) \right\} dt - \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T E_t(k) dt \right\}^2.$$

Cela nécessite l'évaluation des deux premières intégrales; la troisième n'est autre que $\lambda E^2(k)$. Ce travail, assez fastidieux, est omis ici. Les résultats peuvent être exprimés à l'aide des fonctions J_1 et J_2 . Ainsi, on trouve que

$$K_1 \equiv \int_0^T V_t(k) dt \\ = g \eta \left\{ J_1(b) - 2 \eta \beta \tau \cdot J_1(2b) - 2 \eta b \cdot J_2(1, 2b) \right\} \\ + \mu_o \eta \left\{ J_2(1, b) - 2 \eta \beta \tau \cdot J_2(1, 2b) - 2 \eta b \cdot J_2(2, 2b) \right\},$$

et $K_2 \equiv \int_0^T E_t^2(k) dt$

$$= \eta^2 \left\{ g^2 \cdot J_1(2b) + 2 \mu_o g \cdot J_2(1, 2b) + \mu_o^2 \cdot J_2(2, 2b) \right\}.$$

En rassemblant tous les termes on obtient pour la variance, après quelques arrangements, la formule

$$\lambda V(k) = \frac{1}{T} \cdot K_1 + \frac{1}{T} \cdot K_2 - \lambda E^2(k) \\ = \lambda E(k) - \lambda E^2(k) + J_1(2b) \cdot \frac{g \eta^2}{T} (g - 2\beta \tau) \\ + J_2(1, 2b) \cdot \frac{2 \eta^2}{T} (\mu_o g - \mu_o \beta \tau - gb) + J_2(2, 2b) \cdot \frac{\mu_o \eta^2}{T} (\mu_o - 2b),$$

ou aussi

$$\lambda V(k) - \left[\lambda E(k) - \lambda E^2(k) \right] = \frac{\eta^2}{T} \left\{ J_1(2b) \cdot \beta^2 + J_2(1, 2b) \cdot 2\beta \rho_0 + J_2(2, 2b) \cdot \rho_0^2 \right\} t_0 (t_0 - 2T),$$

où l'on peut insérer les expressions explicites pour J_1 et J_2 données plus haut.

En remarquant que $J_1(0) = T$ et $J_2(\alpha, 0) = \frac{1}{\alpha \lambda} (1 - e^{-\alpha \lambda T})$, il est facile de vérifier que pour $\tau = 0$, donc $b = 0$ et $\eta = 1$, on retrouve la formule établie antérieurement (Rapport BIPM-79/11, eq. 16) pour la variance en l'absence d'un temps mort.

(Octobre 1979)