Note sur quelques relations entre moments

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

1. Quelques relations générales

Une méthode pratique et utile pour caractériser la distribution d'une grandeur statistique x - qu'elle repose sur un échantillon empirique ou qu'elle soit exprimée par une loi théorique - consiste à indiquer quelques coefficients ou paramètres que l'on appelle les moments d'une répartition. Il existe un assez grand nombre de différents types de moments; contentons-nous de mentionner les trois qui sont peut-être le plus souvent utilisés. Il s'agit

a) des moments normaux, définis par l'espérance

$$m_r \equiv E\{x^r\} , \tag{1}$$

b) des moments centrés

$$\mu_r \equiv E\left\{(x - m_1)^r\right\} \quad \text{et} \tag{2}$$

c) des moments factoriels (pour x entier)

$$\psi_r \equiv E\left\{x_{(r)}\right\} , \tag{3}$$

$$\text{avec } x_{(r)} \equiv x\,(x-1)\,(x-2)\,\ldots\,(x-r+1) ,$$

où $r = 1, 2, 3, \ldots$ est l'ordre du moment.

Le choix du type de moment utilisé est souvent arbitraire ou dépend du problème étudié; parfois, un bon choix peut simplifier les calculs de façon considérable.

En pratique, on est souvent amené à passer d'un système à l'autre. Pour une telle transformation, on trouve dans la littérature (voir en particulier [1]) les formules correspondantes. Ainsi, pour passer par exemple de (1) à (2) on indique l'expression

$$\mu_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} m_{r-i} (-m_1)^i , \qquad r = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

et pour le passage inverse on a

$$m_r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu_{r-i} \cdot m_1^i . \tag{5}$$

Cependant, notons déjà dans ces deux formules (qui sont faciles à obtenir) quelques petites particularités un peu gênantes. Ainsi, (4) demande que l'on pose $m_o = 1$, ce qui n'est certainement pas contredit par (1), mais ne se vérifie par (5) que si l'on pose $\binom{o}{o} = 1$ et $\mu_o = 1$. En acceptant ces conventions, les relations (4) et (5) sont aussi valables pour $r = 0$ et l'on confirme alors que $\mu_1 = 0$. Par conséquent, ces ennuis ne sont pas très sérieux.

Pour la conversion d'un moment factoriel en un moment ordinaire, la relation est

$$m_r = \sum_{i=1}^{r} S(r,i) \cdot \psi_i , \qquad \text{pour } r = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

et inversement on a

$$\psi_r = \sum_{i=1}^{r} s(r,i) \cdot m_i , \tag{7}$$

où les coefficients $S(r,i)$ et $s(r,i)$ sont les nombres de Stirling de deuxième et première espèce, respectivement. Or, de nouveau il y a un problème pour le cas $r = 0$ qui n'est pas inclus dans (6) ou (7). Pour remédier à cet inconvénient, on peut proposer deux solutions. Ou bien on remplace (6), par exemple, par la formule

$$m_r = \sum_{i=1}^{r} S(r,i) \cdot \psi_i + \delta_{r,o} , \qquad \text{avec } r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

ou bien on écrit

$$m_r = \sum_{i=0}^{r} S(r,i) \cdot \psi_i , \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

en définissant

$$S(r,0) \equiv \delta_{r,o} \qquad \text{et} \qquad \psi_o \equiv 1 . \tag{10}$$

Pour des raisons de simplicité et de cohérence, nous préférons la deuxième solution, c'est-à-dire une généralisation qui repose sur l'emploi des définitions (10). De façon analogue, (7) est alors remplacée par

$$\psi_r = \sum_{j=0}^{r} s(r,j) \cdot m_j , \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

$$\text{avec } s(r,0) \equiv \delta_{r,o} . \tag{12}$$

Par conséquent, les tables habituelles pour les nombres de Stirling seraient à modifier en ce qui concerne leur début et commenceraient donc comme suit

- pour la première espèce $s(n,k)$:

	k=0	1	2	3	4	5
n=0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1

- pour la deuxième espèce $S(n,k)$:

	k=0	1	2	3	4	5
n=0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0
4	0	1	7	6	1	0
5	0	1	15	25	10	1

Pour des tabulations plus étendues, on consultera [2] ou [3].

Il va sans dire que les formules indiquées peuvent aussi être combinées. Ainsi, en insérant par exemple (9) dans (4) on arrive à l'expression générale

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \left[-\psi_1\right]^j \left\{ \sum_{t=0}^{r-j} S(r-j,t) \cdot \psi_t \right\} , \qquad \text{pour } r = 0, 1, \ldots \tag{13}$$

Rassemblons enfin en vue d'applications pratiques quelques expressions explicites. Pour des moments dont l'ordre ne dépasse pas 4 on peut déduire de (4), (5), (9), (11) et (13) les relations suivantes:

$$m_o = \mu_o = \psi_o = 1 , \qquad m_1 = \psi_1 ,$$

$$m_2 = \mu_2 + m_1^2 = \psi_2 + \psi_1 ,$$

$$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 m_1 + m_1^3 = \psi_3 + 3\psi_2 + \psi_1 ,$$

$$m_4 = \mu_4 + 4\mu_3 m_1 + 6\mu_2 m_1^2 + m_1^4 = \psi_4 + 6\psi_3 + 7\psi_2 + \psi_1 ;$$

$$\mu_1 = 0 ,$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \psi_2 + \psi_1 - \psi_1^2 ,$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = \psi_3 + 3\,\psi_2 - 3\,\psi_2\psi_1 + \psi_1 - 3\,\psi_1^2 + 2\,\psi_1^3 ,$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

$$= \psi_4 + 6\,\psi_3 - 4\psi_3\psi_1 + 7\psi_2 - 12\,\psi_2\,\psi_1 + 6\,\psi_2\,\psi_1^2 + \psi_1 - 4\,\psi_1^2 + 6\,\psi_1^3 - 3\,\psi_1^4 ;$$

$$\psi_2 = m_2 - m_1 = \mu_2 - m_1 + m_1^2 ,$$

$$\psi_3 = m_3 - 3m_2 + 2m_1 = \mu_3 - 3\mu_2 + 3\mu_2m_1 + 2m_1 - 3m_1^2 + m_1^3 ,$$

$$\psi_4 = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1$$

$$= \mu_4 - 6\mu_3 + 4\mu_3m_1 + 11\mu_2 - 18\,\mu_2m_1 + 6\,\mu_2m_1^2 - 6m_1 + 11m_1^2 - 6m_1^3 + m_1^4 .$$

Une partie de ces relations se trouve également dans [1].

2. Particularités pour les cumulants

Un autre type de moments qui est parfois utilisé sont les cumulants (ou semi-invariants). Du point de vue théorique, à cause de ses simples propriétés algébriques, c'est sans doute le genre le plus intéressant. On peut définir les cumulants de la manière suivante. Si pour une variable aléatoire x la fonction génératrice des moments ordinaires est définie par

$$M(u) \equiv E\left\{e^{ux}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} m_r \cdot \frac{u^r}{r!} \tag{14}$$

et si l'on développe son logarithme naturel dans une série en puissances de u en posant*

$$K(u) \equiv \ln M(u) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r \cdot \frac{u^r}{r!} , \tag{15}$$

on appelle les coefficients $\mathcal{H}_r$ les cumulants de la variable aléatoire x.

---

* Il va sans dire que l'on pourrait aussi commencer la somme dans (15) par $r = 0$ en posant $\mathcal{H}_o = 0$.

Pour ces opérations, on admet évidemment l'existence des moments et la convergence des séries impliquées. Pour une discussion plus approfondie on consultera [1]. Mentionnons que l'on peut également définir des cumulants factoriels.

Malheureusement, la relation entre cumulants et moments ordinaires, par exemple, est peu commode. Toutefois, on peut indiquer comme expression générale la formule suivante qui permet de retrouver les moments ordinaires à partir des cumulants

$$m_r = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\pi(r,k)} {}_rB_k(r+1-k, \ldots, 2, 1) \cdot \prod_{i=1}^{r+1-k} \varkappa_i^{k_i} , \qquad (16)$$

où la deuxième somme s'étend sur toutes les partitions de r pour lesquelles

$$\sum_i k_i = k \qquad \text{et} \qquad \sum_i i \cdot k_i = r .$$

Les quantités ${}_rB_k$ correspondent aux coefficients qui apparaissent dans les polynômes de Bell. Les premières valeurs sont indiquées dans le tableau 1.

Tableau 1: Les coefficients B de Bell pour $r \leqslant 5$

r	${}_rB_k(\ldots)$
1	${}_1B_1(1) = 1$
2	${}_2B_1(2) = 1$; ${}_2B_2(1) = 1$
3	${}_3B_1(3) = 1$; ${}_3B_2(2,1) = 3$; ${}_3B_3(1) = 1$
4	${}_4B_1(4) = 1$; ${}_4B_2(3,1) = 4$, ${}_4B_2(2) = 3$; ${}_4B_3(2,1) = 6$; ${}_4B_4(1) = 1$
5	${}_5B_1(5) = 1$; ${}_5B_2(4,1) = 5$, ${}_5B_2(3,2) = 10$; ${}_5B_3(3,1) = 10$, ${}_5B_3(2,1) = 15$; ${}_5B_4(2,1) = 10$; ${}_5B_5(1) = 1$

Des tables plus étendues (jusqu'à $r = 10$) se trouvent dans [1] et [2]. Pour les quatre premiers ordres, toutes les relations qui existent entre les cumulants et les moments définis par (1) et (2) sont rassemblés ci-après.

$$\mathcal{H}_1 = m_1$$

$$\mathcal{H}_2 = m_2 - m_1^2 = \mu_2$$

$$\mathcal{H}_3 = m_3 - 3\, m_2\, m_1 + 2\, m_1^3 = \mu_3$$

$$\mathcal{H}_4 = m_4 - 4\, m_3\, m_1 - 3\, m_2^2 + 12\, m_2\, m_1^2 - 6\, m_1^4 = \mu_4 - 3\, \mu_2^2$$

$$m_2 = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_1^2 \; ; \qquad \mu_2 = \mathcal{H}_2$$

$$m_3 = \mathcal{H}_3 + 3\, \mathcal{H}_2\, \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^3 \; ; \qquad \mu_3 = \mathcal{H}_3$$

$$m_4 = \mathcal{H}_4 + 4\, \mathcal{H}_3\, \mathcal{H}_1 + 3\, \mathcal{H}_2^2 + 6\, \mathcal{H}_2\, \mathcal{H}_1^2 + \mathcal{H}_1^4 \; ; \quad \mu_4 = \mathcal{H}_4 + 3\, \mathcal{H}_2^2 \; .$$

3. Les moments de la loi binomiale

Parmi les distributions statistiques, la loi binomiale joue un rôle primordial, tant sur le plan théorique que pratique. Il est donc d'autant plus surprenant que les traités habituels ne semblent pas donner une expression générale pour les moments correspondants. Les notes diverses rassemblées ici sont peut-être une bonne occasion pour présenter une expression générale pour m_r et qui sera alors transformée dans une formule pour les moments centrés.

Dans le cas d'une variable aléatoire k qui suit une loi binomiale avec les paramètres $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant p \leqslant 1$, on obtient pour le moment ordinaire d'ordre r

$$m_r = \sum_{k=0}^{n} k^r \cdot p^k\, q^{n-k} \binom{n}{k} , \qquad \text{où } q \equiv 1 - p \; . \tag{17}$$

En développant

$$k^r = \sum_{j=0}^{r} S(r, j) \cdot k_{(j)} \tag{18}$$

et en demandant que

$$k_{(j)} = \binom{k}{j}\, j\,! \equiv 0 \qquad \text{pour } j > k$$

$$\text{et} \quad 0_{(j)} \equiv j\,! \cdot \delta_{j,o} \; , \tag{19}$$

on peut aussi écrire

$$m_r = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{r} S(r,j) \cdot k_{(j)} \cdot p^j \, p^{k-j} \, q^{n-k} \cdot \frac{n_{(k)}}{k!}$$

$$= \sum_j \sum_k p^j \, k_{(j)} \cdot S(r,j) \cdot p^{k-j} \, q^{n-k} \cdot \frac{n_{(k)}}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{r} p^j \, n_{(j)} \cdot S(r,j) \sum_{k=0}^{n} p^{k-j} \, q^{n-k} \cdot \frac{n_{(k)}}{n_{(j)}} \, \frac{k_{(j)}}{k!} \, .$$

Or, on vérifie aisément que pour $k \gg j$

$$\frac{n_{(k)}}{n_{(j)}} = (n-j)_{(k-j)}$$

et $$\frac{k_{(j)}}{k!} = \frac{1}{(k-j)!} \, .$$

Avec les abréviations

$$K = k - j \qquad \text{et} \qquad N = n - j$$

on a, par conséquent,

$$m_r = \sum_{j=0}^{r} p^j \, n_{(j)} \cdot S(r,j) \sum_{K=0}^{N} p^K q^{N-K} \cdot \frac{N_{(K)}}{K!}$$

$$= \sum_{j=0}^{r} S(r,j) \cdot n_{(j)} \cdot p^j \, . \tag{20}$$

Ce résultat est la formule générale recherchée. Pour les premiers moments, on en déduit les expressions suivantes

$$m_o = 1, \qquad m_1 = np \, ,$$

$$m_2 = np \left[(n-1)\, p + 1\right] = np\,(np + q) \qquad \text{et} \tag{21}$$

$$m_3 = np \left[(n-1)\,(n-2)\, p^2 + 3\,(n-1)\, p + 1 \right]$$

$$= np \left[(np + q)^2 + (n-1)\, pq \right] .$$

Passons maintenant aux moments centrés. En insérant (20) dans la formule (4), qui est aussi valable pour $r = 0$, on arrive sans peine à

$$\mu_r = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} m_{r-t} \cdot (-m_1)^t$$

$$= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \sum_{j=0}^{r-t} S(r-t, j) \cdot n_{(j)} \cdot p^j \cdot (-m_1)^t$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-np)^k \sum_{j=0}^{r-k} S(r-k, j) \cdot n_{(j)} \cdot p^j \; . \qquad (22)$$

Des contrôles donnent en effet pour les premiers moments

$$\mu_o = 1 , \qquad \mu_1 = 0 ,$$

$$\mu_2 = npq ,$$

$$\mu_3 = npq\,(q-p) \qquad \text{et}$$

$$\mu_4 = npq\,[1 + 3\,(n-2)\,pq] ,$$

ce qui est en accord avec les résultats que l'on peut obtenir successivement et avec plus de peine en partant, par exemple, de la fonction caractéristique.

Il est intéressant de comparer (20) à l'expression générale (6), car on remarquera alors qu'un résultat particulièrement simple peut être attendu pour les moments factoriels, et ceci aurait pu nous servir de point de départ. En effet, il n'est pas difficile de montrer (les raisonnements ressemblent bien à ceux qui sont utilisés pour déterminer m_r) que pour la loi binomiale on a

$$\psi_r = n_{(r)} \cdot p^r \; ; \qquad (23)$$

la vérification en est laissée au lecteur.

Il s'ensuit que, dans ce cas, il n'y a qu'un nombre fini de moments factoriels puisque $\psi_r = 0$ pour $r > n$.

Des expressions analogues pour les moments d'une variable qui suit une loi binomiale négative (aussi appelée de Pólya ou de Pascal) s'obtiennent de façon similaire. Les formules générales ont été indiquées auparavant dans l'annexe à [4].

Références

[1] M.G. Kendall, A. Stuart: "The advanced Theory of Statistics, Vol. I" (Griffin, London, 1969[3])

[2] J. Riordan: "An Introduction to Combinatorial Analysis" (Wiley, New York, 1958), et aussi "Combinatorial Identities" (Wiley, New York, 1968)

[3] "Handbook of Mathematical Functions" (édité par M. Abramowitz et I.A. Stegun) NBS, AMS 55 (GPO, Washington, 1964)

[4] J.W. Müller: "A test for judging the presence of additional scatter in a Poisson process", Rapport BIPM-78/2 (1978)

(Juillet 1978)