Bureau International des Poids et Mesures

Rapport BIPM-86/9

CHAMP DE GRAVITATION D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER EN L'UN DE SES SOMMETS

par P. Carré

Je reprends la disposition et les notations adoptées dans un article récent [1] et je me propose de calculer le champ de gravitation $\underline{F}$ produit en C par le tétraèdre plein et homogène CAHF, de masse volumique ρ (voir figure à la page 2). Par simple raison de symétrie, ce champ est dirigé suivant l'axe C$\underline{u}$, d'origine C et passant par E. Soit Q le point d'intersection de cet axe avec le plan AHF, base du tétraèdre, d'équation $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z} = \underline{s}$. Désignons par $\underline{h}$ la distance CQ. Nous avons

$$\underline{h} = 2\underline{s}/\sqrt{3}.$$

Je considère maintenant la "tranche" d'épaisseur d$\underline{u}$ délimitée dans le tétraèdre par deux plans infiniment voisins normaux en U à l'axe C$\underline{u}$. Soit $\underline{c}$ la longueur des côtés de cette tranche triangulaire. Par homothétie, nous avons

$$\underline{c} = \underline{s}\sqrt{2}\,\frac{\underline{u}}{\underline{h}} = \underline{u}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le rayon du cercle inscrit dans ce triangle est

$$\underline{R} = \frac{\underline{c}}{2\sqrt{3}} = \frac{\underline{u}}{2\sqrt{2}}$$

et le rayon du cercle circonscrit est $2\underline{R}$.

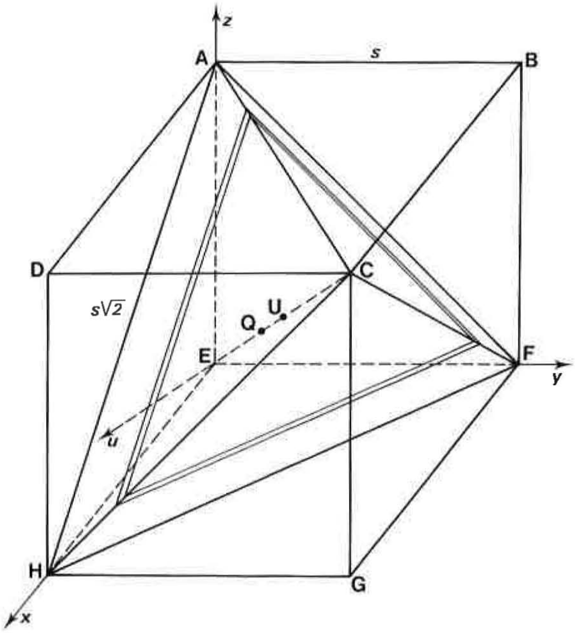
Je calcule le champ produit en C par cette tranche en intégrant le champ de la couronne élémentaire de rayons $\underline{r}$ et $\underline{r} + d\underline{r}$ et en retranchant la contribution des parties extérieures au triangle.

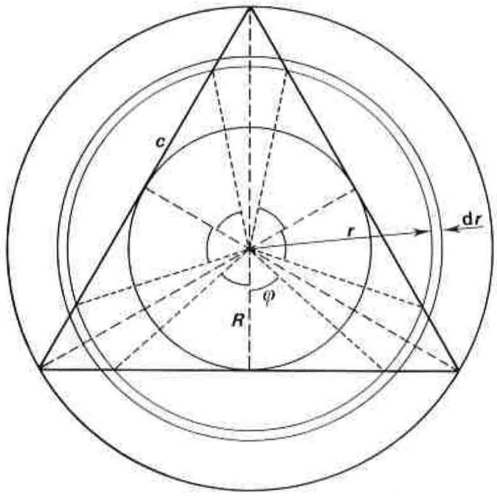
(1) METHERELL, A.J.F. and QUINN, T.J. The gravitational field of a 111 tetrahedron. Metrologia, 22, 1986, pp. 87-91.

Nous avons, G étant la constante de gravitation,

$$\frac{dF}{G\rho} = du \int_0^{2R} \frac{u}{\sqrt{u^2+r^2}} \cdot \frac{2\pi r dr}{u^2+r^2} - du \int_R^{2R} \frac{u}{\sqrt{u^2+r^2}} \cdot \frac{6\phi r dr}{u^2+r^2},$$

$$\text{avec } \cos \phi = \frac{R}{r}, \text{ d'où } 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{3}.$$





Calcul du premier terme

$$\frac{dF_1}{G\rho} = 2\pi \; du \int_0^{2R} \frac{u r dr}{(u^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi \; du \left[\frac{u}{\sqrt{u^2+r^2}} \right]_{r=2R}^{r=0}$$

$$= 2\pi \; du \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}\right) = 2\pi \; du \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \qquad (1)$$

Calcul du second terme

Nous avons $r = \dfrac{R}{\cos \phi}$, soit $r = \dfrac{u}{2\sqrt{2} \cos \phi}$ et $dr = \dfrac{u \sin \phi \; d\phi}{2\sqrt{2} \cos^2\phi}$.

Le second terme s'écrit donc

$$\frac{dF_2}{G\rho} = -6 \; du \int_0^{\pi/3} \frac{u\phi \cdot \dfrac{u^2 \sin \phi \; d\phi}{8\cos^3\phi}}{\left(u^2 + \dfrac{u^2}{8\cos^2\phi}\right)^{3/2}} = -6 \; du \int_0^{\pi/3} \frac{\dfrac{\phi \sin \phi \; d\phi}{8\cos^3\phi}}{\left(1 + \dfrac{1}{8\cos^2\phi}\right)^{3/2}}.$$

.../

Une intégration par parties donne

$$\frac{d\underline{F}_2}{\underline{G}\rho} = 6\ d\underline{u} \left[\frac{\phi}{\left(1 + \frac{1}{8\cos^2\phi}\right)^{1/2}} \right]_0^{\pi/3} - 6\ d\underline{u} \int_0^{\pi/3} \frac{d\phi}{\left(1 + \frac{1}{8\cos^2\phi}\right)^{1/2}}.$$

Évaluons d'abord le terme tout intégré.

C'est $$6\ d\underline{u}\ \frac{\pi/3}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1/2}} = 6\ d\underline{u}\ \frac{\pi/3}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 6\ d\underline{u}\ \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi\ d\underline{u}\sqrt{\frac{2}{3}}. \qquad (2)$$

Quant à l'autre, il s'écrit

$$- 6\ d\underline{u} \int_0^{\pi/3} \frac{2\sqrt{2}\cos\phi\ d\phi}{(8\cos^2\phi + 1)^{1/2}},$$

et, en posant $\sin\phi = \underline{t}$,

$$- 6\ d\underline{u} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2\sqrt{2}\ d\underline{t}}{(9 - 8\underline{t}^2)^{1/2}} = - 6\ d\underline{u} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{d\underline{t}}{\left(\frac{9}{8} - \underline{t}^2\right)^{1/2}}$$

$$= - 6\ d\underline{u} \left[\arcsin \frac{\underline{t}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = - 6\ d\underline{u}\ \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (3)$$

$$= - 6\ d\underline{u}\ \arctan\sqrt{2}.$$

En regroupant les résultats (1), (2) et (3), nous obtenons

$$\frac{d\underline{F}}{\underline{G}\rho} = (2\pi - 6\arctan\sqrt{2})\ d\underline{u}$$

et, finalement, $\dfrac{\underline{F}}{\underline{G}\rho} = (2\pi - 6\arctan\sqrt{2}) \displaystyle\int_0^{\underline{h}} d\underline{u}$,

soit $$\frac{\underline{F}}{\underline{G}\rho} = (2\pi - 6\arctan\sqrt{2})\ \underline{h} = \frac{4\underline{s}}{\sqrt{3}} (\pi - 3\arctan\sqrt{2}).$$

.../

La valeur numérique du coefficient de h est approximativement 0,551 285 6, celle du coefficient de s est approximativement 0,636 569 8.

Les trois composantes F_x, F_y et F_z, égales entre elles, sont égales à $F/\sqrt{3}$,

$$\text{d'où} \quad F_x = F_y = F_z = \frac{4G\rho s}{3} (\pi - 3 \arctan \sqrt{2}).$$

Numériquement, on trouve approximativement 0,367 523 7 $G\rho s$.

Septembre 1986