

Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

Dans le but d'améliorer l'exactitude de certains procédés qui sont utilisés dans les mesures d'activité selon la méthode  $4\pi\beta\text{-}\gamma$ , plusieurs études ont été entreprises ; deux d'entre elles sont résumées ci-dessous. La première est, pour le moment au moins, d'un intérêt plutôt théorique, tandis que la seconde se rapporte à une méthode de mesure utilisée déjà depuis longtemps.

*Densité d'intervalles pour un processus stationnaire*

Considérons un processus régénératif dont l'intervalle de temps entre deux événements consécutifs enregistrés est donné par la densité  $f(t)$ . Si l'origine du temps  $t$  coïncide avec l'arrivée d'une impulsion (numéro zéro), le temps d'arrivée de l'événement  $k$  est décrit par la densité

$$f_k(t) = \{f(t)\}^{*k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

c'est-à-dire par l'autoconvolution d'ordre  $k$  de  $f(t)$ . Or, la situation expérimentale correspond le plus souvent à un choix "au hasard" de l'origine du temps et il en résulte ce que l'on appelle un processus stationnaire ou en équilibre. La densité pour l'arrivée de l'impulsion numéro  $k$  est alors donnée par la convolution

$$g_k(t) = g(t) * f_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

où

$$g(t) \equiv g_1(t) = \int_t^\infty f(x) dx / \int_0^\infty t \cdot f(t) dt.$$

Le problème que l'on s'est posé est d'établir des formules explicites pour  $g_k(t)$  si l'on considère le cas pratique d'un processus de Poisson (avec taux de comptage original  $\rho$ ) qui a été modifié par l'insertion d'un temps mort  $\tau$  du type non étendu (n) ou étendu (e). Les expressions correspondantes  $f_k(t)$  pour le processus ordinaire sont connues depuis longtemps. Nous nous contentons d'indiquer les résultats principaux (voir Rapport BIPM-74/6).

Pour un temps mort non étendu, la densité pour l'arrivée de l'impulsion  $k$  est

$${}_n g_k(t) = \frac{\rho}{1+x} \left[ U(T_{k-1}) - U(T_k) + U(T_k) \sum_{j=0}^{k-1} P_k(j) - U(T_{k-1}) \sum_{j=0}^{k-2} P_{k-1}(j) \right],$$

où

$$x = \rho\tau, \quad T_k = \rho(t - k\tau), \quad P_k(j) = (T_k^j / j!) \cdot \exp(-T_k)$$

et  $U$  est la fonction échelon unité.

En particulier, on a donc pour la première impulsion

$${}_n g_1(t) = \begin{cases} \frac{\rho}{1+\rho\tau} & \text{pour } 0 < t \leq \tau, \\ \frac{\rho}{1+\rho\tau} \exp[-\rho(t-\tau)] & \text{" } t \geq \tau. \end{cases}$$

Dans le cas d'un temps mort étendu, l'expression correspondante, pour l'impulsion  $k$ , est

$${}_e g_k(t) = \rho \cdot \exp(-x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \sum_{j=k-1}^J \frac{(-T_j \cdot e^{-x})^j}{(j-k+1)!},$$

où  $J$  est l'entier immédiatement inférieur à  $t/\tau$ .

Ici, le cas spécial  $k = 1$  donne

$${}_e g_1(t) = \rho \cdot \exp(-\rho\tau) \cdot \sum_{j=0}^J \frac{[-\rho(t-j\tau)]^j}{j!} \cdot \exp(-j\rho\tau).$$

La figure 1 montre la répartition expérimentale de la première impulsion. Pour les deux types de temps morts l'accord avec la forme théorique est excellent. On note en particulier que la densité est toujours constante pour  $t \leq \tau$ . Un autre résultat intéressant de cette étude est l'identité

$${}_e g_k(t) = {}_e f_k(t+\tau),$$

qui n'est valable que pour un temps mort étendu.

Puisque les premiers moments sont souvent des grandeurs très utiles pour caractériser une variable aléatoire, on en a déterminé quelques-uns pour les intervalles décrits par  $f_k(t)$  et  $g_k(t)$ . Les relations correspondantes se trouvent dans le tableau 1 ; elles généralisent les formules données auparavant. Rappelons que le moment ordinaire (d'ordre  $r$ ) est défini par

$$m_r = E \{ t^r \} = \int_0^{\infty} t^r \cdot h(t) dt, \quad r = 0, 1, \dots,$$

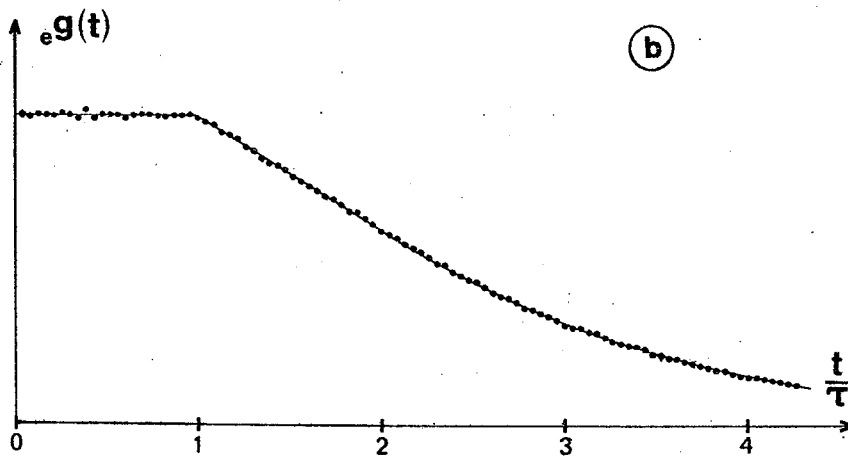
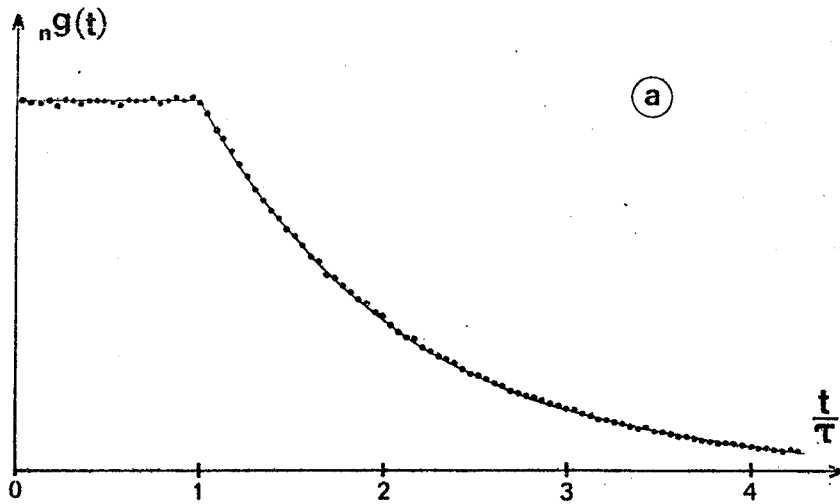


Fig. 1'.- Temps d'arrivée de la première impulsion, pour  $t = 0$  choisi au hasard.

Conditions expérimentales :  $\rho \approx 2\,000\text{ s}^{-1}$ ,  $\tau \approx 400\ \mu\text{s}$ .

Le temps mort est du type non étendu (a) ou étendu (b).

où  $h(t)$  est la densité de probabilité pour  $t$ . De façon analogue, on a pour les moments centrés

$$\mu_r = E \left\{ (t - m_1)^r \right\}, \quad r = 2, 3, \dots$$

TABLEAU I

Premiers moments pour un intervalle de temps  $t$  décrit par les densités  $f_k(t)$  et  $g_k(t)$

On a posé  $x = \rho\tau$ ,  $y = \exp x$  et  $\lambda = 1/(1+x)$ .

	Temps mort non étendu :		Temps mort étendu :	
	$n^f_k(t)$	$n^g_k(t)$	$e^f_k(t)$	$e^g_k(t)$
$m_1$	$\frac{k}{\rho} \frac{1}{\lambda}$	$\frac{k}{\rho} \lambda \left[ 1 + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) x (2 + x) \right]$	$\frac{k}{\rho} y$	$\frac{k}{\rho} \left( y - \frac{x}{k} \right)$
$\mu_2$	$\frac{k}{\rho^2}$	$\frac{k}{\rho^2} \left[ 1 + \frac{\lambda^2 x^3}{3k} \left(1 + \frac{x}{4}\right) \right]$	$\frac{k}{\rho^2} y (y - 2x)$	
$\mu_3$	$\frac{2k}{\rho^3}$	$\frac{2k}{\rho^3} \left[ 1 + \frac{\lambda^3 x^4}{8k} \right]$	$\frac{2k}{\rho^3} y \left( y^2 - 3xy' + \frac{3}{2}x^2 \right)$	

On notera de nouveau que, contrairement à l'opinion usuelle, les expressions pour un temps mort étendu ne sont pas plus compliquées que celles qui sont valables pour le type non étendu.

#### Description rigoureuse de la méthode "source et oscillateur"

Dans une variante de la méthode classique à deux sources pour la mesure d'un temps mort, on détermine d'abord le taux de comptage expérimental  $r$  d'une source radioactive. Puis on superpose aux impulsions de la source celles provenant d'un oscillateur à fréquence fixe  $\nu$ . Le taux de comptage pour ce nouveau processus superposé sera désigné par  $r_\nu$ . Le problème consiste maintenant à déduire de  $r$ ,  $\nu$  et  $r_\nu$  la valeur du temps mort  $\tau$  du détecteur utilisé, temps mort supposé du type non étendu. Vu la complexité du processus résultant, la formule utilisée habituellement\*

$$\tau_0 = \frac{1}{r} \left[ 1 - \sqrt{\frac{r_\nu - r}{\nu}} \right]$$

ne peut être qu'une approximation, quoique éventuellement suffisante.

\* BAERG (A.P.), Variation on the paired source method of measuring dead time, *Metrologia*, 1, 1965, pp. 131-133.

Une analyse détaillée du problème a permis de localiser la difficulté principale : elle vient de la nécessité de connaître la distribution des intervalles de temps entre une impulsion enregistrée provenant de la source et l'impulsion suivante provenant de l'oscillateur, distribution qui peut être très compliquée.

Toute impulsion comptée provenant de l'oscillateur représente un point de renouvellement et, par conséquent, le déroulement ultérieur du processus ne dépend plus de son passé ; cela a rendu possible l'établissement d'un programme récursif pour ordinateur permettant d'évaluer numériquement la densité  $D(t)$  des intervalles en question. Cette partie décisive de la nouvelle approche du problème est décrite dans le Rapport BIPM-76/3. La forme de  $D(t)$  est en excellent accord avec le résultat de simulations directes par la méthode de Monte-Carlo, comme on peut en juger par l'exemple donné à la figure 2. La perte  $P$  correspondante est

$$P = \int_0^{\tau} D(t) dt = \mu \cdot v \tau,$$

où  $\mu$  est un facteur correctif qui a été tabulé en fonction des deux variables  $\rho' = p/v$  et  $\tau' = v\tau$  (fig. 3). Auparavant on avait admis implicitement que  $\mu = 1$ . Les valeurs calculées de  $\mu$  concordent très bien avec celles obtenues par simulation (voir tableau 2).

TABLEAU 2

*Valeurs numériques du facteur de correction  $\mu$   
obtenues par calcul ou par simulation par la méthode de Monte-Carlo*

Ces valeurs de  $\mu$  correspondent à  $\rho' = 3$ .

$\tau'$	Facteur de correction $\mu$	
	Calcul	Simulation
0,1	1,083 3	1,087 $\pm$ 0,003
0,2	1,143 1	1,141 $\pm$ 0,002
0,3	1,198 2	1,198 $\pm$ 0,002
0,4	1,183 3	1,182 $\pm$ 0,002
0,5	1,316 8	1,317 $\pm$ 0,002

Après un certain nombre de raisonnements et de calculs qui ne sont pas reproduits ici, on peut montrer que la valeur du temps mort, lorsqu'elle est inférieure à  $1/v$ , est donnée rigoureusement par

$$\tau = \frac{1 + \mu}{2\mu \cdot r_v} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \cdot \frac{r_v}{r} \cdot \frac{r + v - r_v}{v}} \right].$$

En pratique, la détermination de  $\tau$  doit se faire aussi par itération puisque le choix de  $\mu$  suppose déjà une connaissance préalable (bien que seulement approximative) de  $\tau$ . On remarquera qu'il ne suffirait pas de

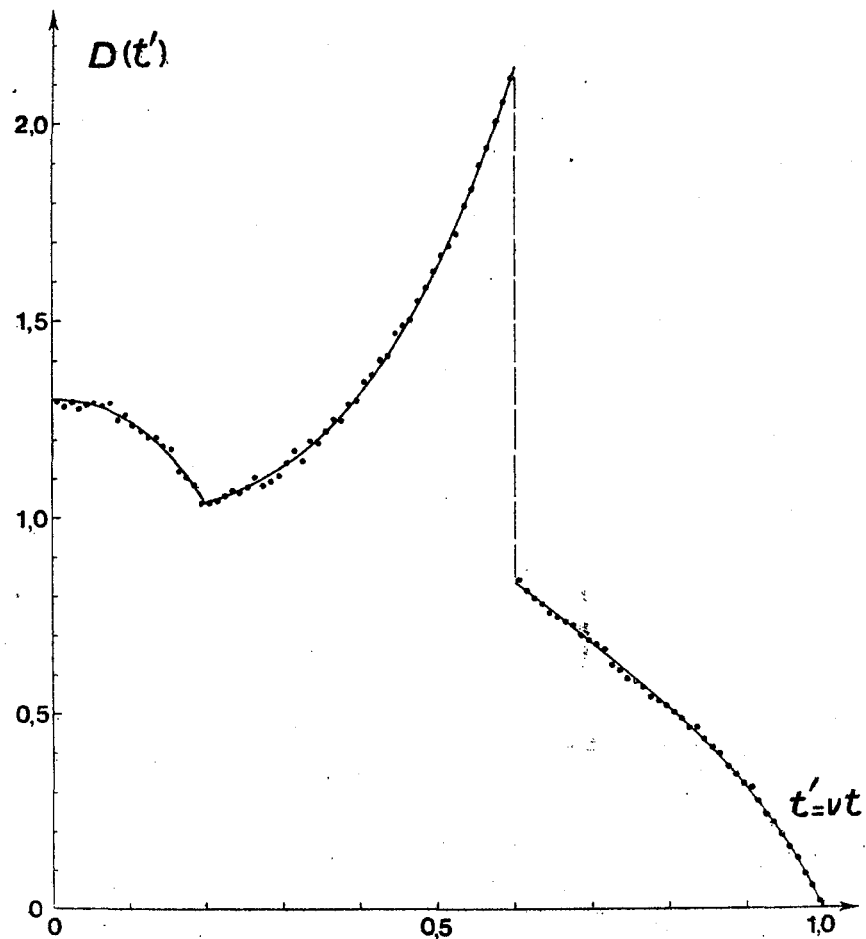


Fig. 2.- Exemple de distribution des intervalles  $t$  entre l'arrivée d'une impulsion enregistrée provenant de la source et l'événement suivant provenant de l'oscillateur.

Les valeurs des paramètres sont  $\rho' = 3$  et  $\tau' = 0,4$ . On a utilisé la variable sans dimension  $t' = vt$ . La courbe est obtenue par le calcul ; les points résultent d'une simulation (méthode de Monté-Carlo) portant sur un million d'"histoires".

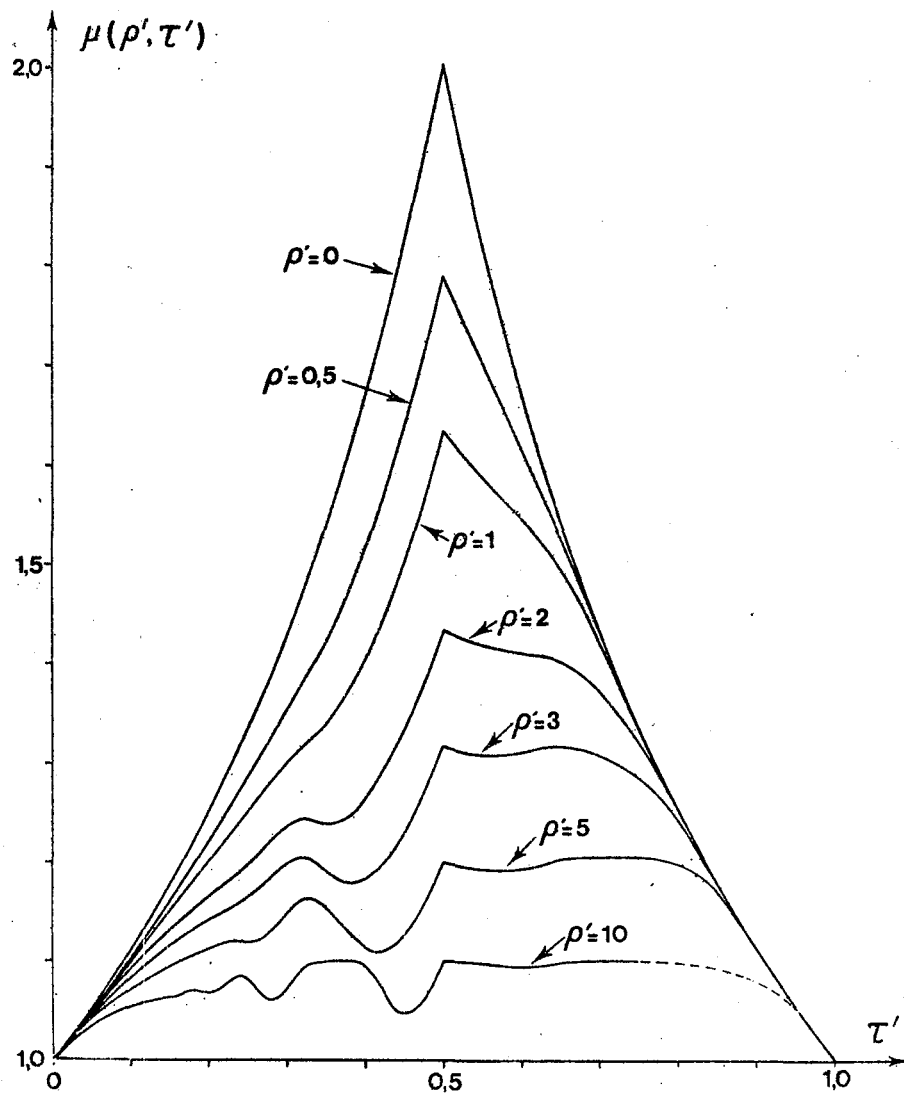


Fig. 3.- Représentation graphique du facteur correctif  $\mu$  en fonction de  $\tau' = vt$ , pour quelques valeurs de  $\rho' = \rho/v$ .

poser  $\mu = 1$  pour retrouver l'ancienne expression car celle-ci contient des corrections qui compensent en grande partie l'absence de  $\mu$ .

La nouvelle description donne également des expressions pour la transmission, c'est-à-dire la probabilité de "survie", des impulsions composantes et de même pour leur superposition ; on connaît ainsi le taux de comptage du processus total qui est

$$r_v = \frac{\rho + v - \mu \cdot \rho v \tau}{1 + \rho \tau (1 - \mu \cdot v \tau)}$$

Cela permet de contrôler l'exactitude de l'ancienne formule pour  $\tau_0$  où il suffit d'insérer  $r_v$  et  $r = \rho / (1 + \rho \tau)$  pour trouver le rapport

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1 + x}{x} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 + \rho' - \mu x}{1 + x(1 - \mu \tau')}} - \frac{\rho'}{1 + x} \right],$$

où  $x = \rho \tau = \rho' \tau'$ . On vérifie ainsi que l'ancienne formule est suffisamment exacte pour le domaine des paramètres pratiquement utilisés car  $\tau_0/\tau$  s'écarte le plus souvent de moins de  $10^{-3}$  de l'unité, et l'on ne manquera pas d'admirer l'intuition physique des inventeurs de la méthode dont ce résultat fait la preuve. D'autre part, il est rassurant de disposer d'une formule exacte qui, outre de tels contrôles, permet d'étendre l'application pratique de cette méthode de mesure d'un temps mort. Pour plus de détails, voir le Rapport BIPM-76/5.

#### *Autres travaux*

Parmi les travaux non décrits ici, on peut distinguer deux groupes.

Une courte revue des méthodes de corrélation (Rapport BIPM-75/5), écrite pour une nouvelle édition d'un manuel sur les procédés utilisés dans le domaine des radioactivités (Handbook 80), essaie de donner un aperçu des développements récents. Dans un but analogue, on a rassemblé une bibliographie contenant plus de 350 références sur des problèmes liés aux temps morts (Rapport BIPM-75/6) ; elle devrait aider à réduire le nombre de duplications dans ce domaine.

Le second groupe concerne des études spéciales :

- précision inhérente au comptage modulo 2 (Rapport BIPM-75/7) dont le principe avait été décrit auparavant ;
- nombre moyen d'impulsions comptées pour différents choix de l'origine des temps (Rapport BIPM-75/11) ;
- répartition du temps d'arrivée d'une impulsion dans un processus de Poisson si le nombre total d'enregistrements est fixé à l'avance (Rapport BIPM-75/9) ; cette dernière étude a d'ailleurs conduit à des résultats assez surprenants.

(Octobre 1976)