B I P M
F-92310 SEVRES

Rapport BIPM-75/9

Temps d'arrivée conditionnels d'impulsions

Jörg W. Müller

Les intervalles entre impulsions formant un processus de Poisson ne sont plus décrits par une simple loi exponentielle si l'on impose la condition d'en compter exactement N dans un intervalle fixe de longueur T. On a montré que, dans ces conditions, la densité d'arrivée pour l'impulsion numéro n est plutôt donnée par

$$f_{n|N}(t|T) = n \binom{N}{n} \cdot \frac{t^{n-1}}{T^N} \cdot (T-t)^{N-n} ,$$

avec $0 \leqslant t \leqslant T$ et $1 \leqslant n \leqslant N$.

On remarquera que le taux de comptage ρ n'y intervient pas.

La Fig. 1 montre un exemple pour $N = 5$ et $T = 100$ (avec 50 000 "histoires").

On déduit alors aisément que la somme des densités est

$$S_N(t) \equiv \sum_{n=1}^{N} f_{n|N}(t|T) = N/T = N \cdot f_{1|1}(t|T) ,$$

donc une constante (distribution rectangulaire de 0 à T).

Avec un peu plus d'efforts, les moments ordinaires se déterminent comme

$$m_r \equiv \int_0^T t^r \cdot f_{n|N}(t|N)\, dt = \frac{N!}{(N+r)!} \cdot \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} \cdot T^r ,$$

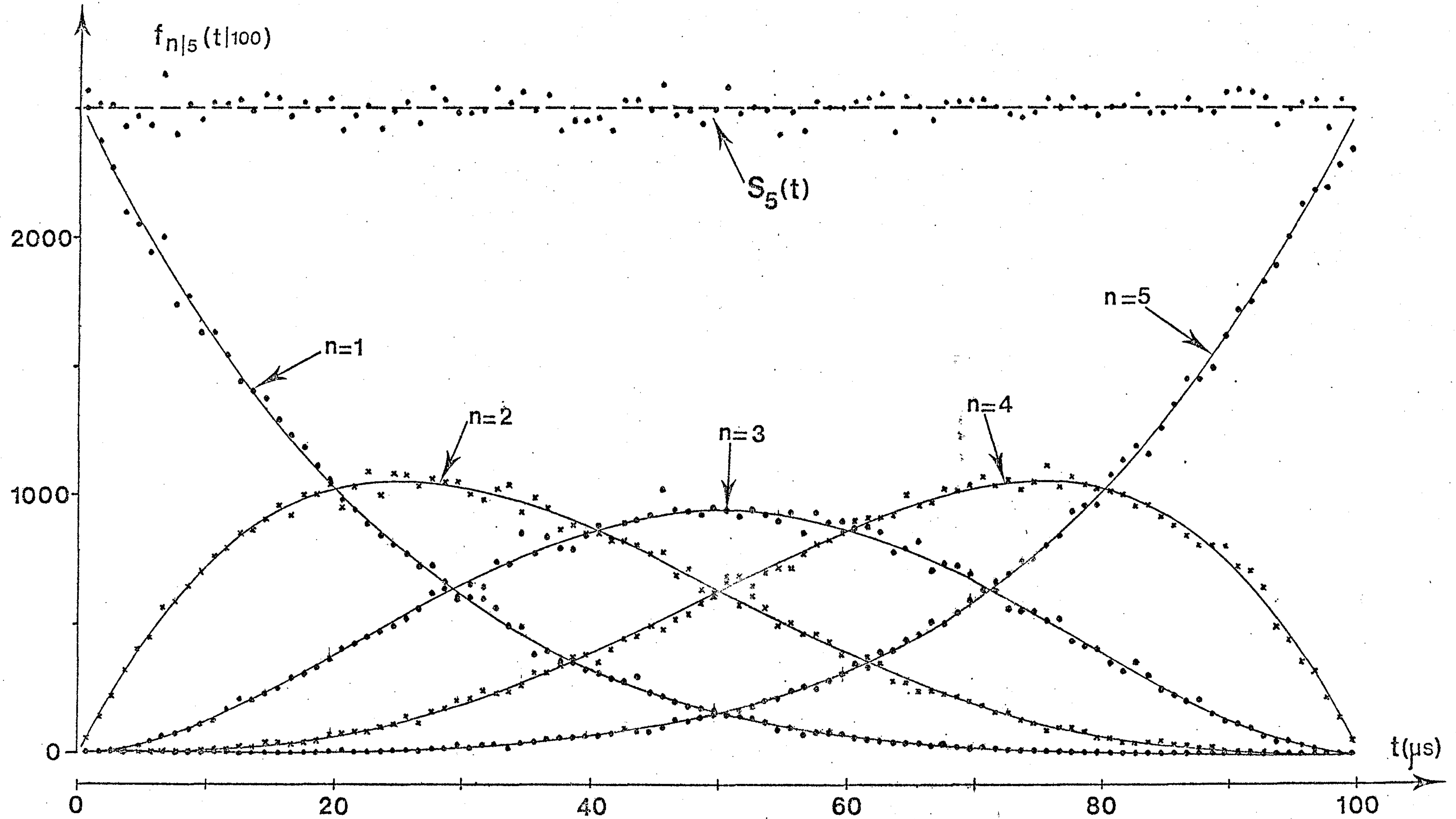

Figure 1

d'où $m_o = 1$,

$$m_1 = \frac{n}{N+1} \cdot T \quad \text{et}$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{n\,(N+1-n)}{(N+1)^2\,(N+2)} \cdot T^2 \;.$$

Pour les intervalles entre impulsions successives, on peut vérifier que leur densité est (pour tout n)

$$\varphi_N(t') = \frac{N}{T^N} \cdot (T - t')^{N-1} = f_{1|N}(t' \,|\, T) \;,$$

avec $t' \equiv t_{k+1} - t_k$, si t_k désigne le temps d'arrivée de l'impulsion numéro k, avec $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

En présence de temps morts, l'évaluation des distributions correspondantes se complique beaucoup. A part le type qui intervient, il faut également spécifier les conditions expérimentales pour $t=0$ et T (coincidant avec une impulsion ou choix au hasard, par exemple).

L'étude de ces distributions, dont la connaissance promet de se révéler utile dans les problèmes des coïncidences fortuites (dont la connaissance n'a guère avancé depuis des années), a déjà bien progressé. Les résultats peuvent être contrôlés par des simulations du type Monte Carlo sur ordinateur, et P. Bréonce est en train de construire un dispositif électronique qui permettra d'enregistrer la plupart de ces répartitions directement et dans des conditions qui correspondent plus directement aux besoins expérimentaux. La Fig. 2 ne montre pas le fameux Fuji, mais compare le résultat d'une simulation aux prévisions du calcul pour le simple cas de $N = 1$, $T = 100\,\mu s$, $\tau = 55\,\mu s$ (non cumulatif) et $\rho = 20\,000\ s^{-1}$. On a enregistré la position de 100 000 impulsions remplissant la condition $N = 1$.

(Septembre 1975)

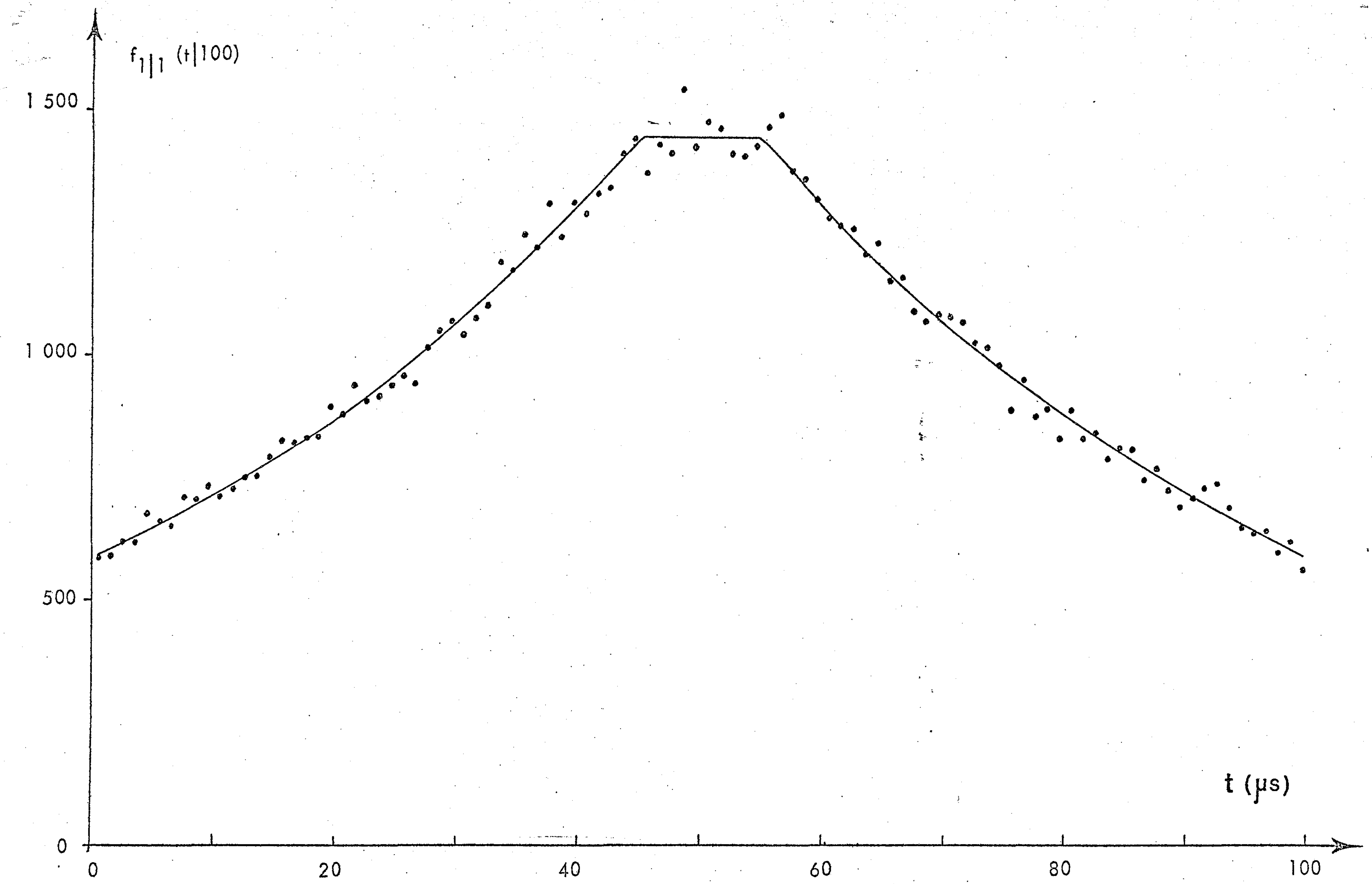

Figure 2