P. Carré

Rapport BIPM-75/10

Typographie provisoire

Comparaison de deux groupes de piles étalons

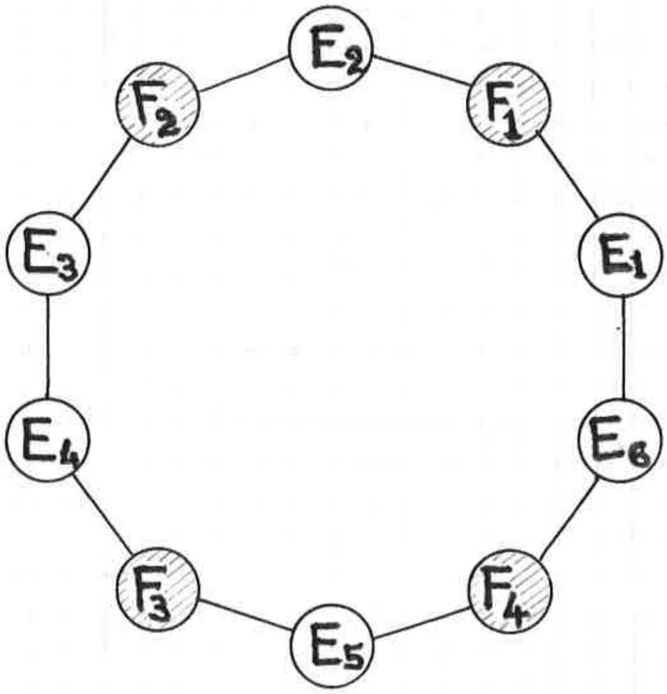
Principes mathématiques du traitement par le programme CAPRW

Ces principes vont être exposés en prenant comme exemple la comparaison d'un groupe E de 6 piles E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 à un groupe F de 4 piles F_1, F_2, F_3 et F_4.

Soient E la force électromotrice moyenne des piles du groupe E, F celle des piles du groupe F, $E_1, E_2, \ldots E_6$, les f.é.m. des piles $E_1, E_2, \ldots E_6$, $F_1, F_2, \ldots F_4$ celles des piles $F_1, F_2, \ldots F_4$.

Equations de condition.

Le schéma de comparaison choisi est représenté ci-contre : une barre réunissant deux piles représente une mesure (aller et retour) de la différence des f.é.m. de ces deux piles. En pratique, si on mesure $E_1 - F_1$ à l'aller, on mesurera $F_1 - E_1$ au retour.



Finalement, on dispose des 10 équations de condition :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
E_1 - F_1 &=& a_1 \\
E_2 - F_1 &=& a_2 \\
E_2 - F_2 &=& a_3 \\
E_3 - F_2 &=& a_4 \\
E_3 - E_4 &=& a_5 \\
F_3 - E_4 &=& a_6 \\
F_3 - E_5 &=& a_7 \\
F_4 - E_5 &=& a_8 \\
F_4 - E_6 &=& a_9 \\
E_1 - E_6 &=& a_{10}
\end{array}\right. .$$

En posant :

$$\left.\begin{array}{rcl}
e_1 &=& E_1 - E \\
e_2 &=& E_2 - E \\
e_3 &=& E_3 - E \\
e_4 &=& E_4 - E \\
e_5 &=& E_5 - E \\
e_6 &=& E_6 - E \\
f_1 &=& F_1 - F \\
f_2 &=& F_2 - F \\
f_3 &=& F_3 - F \\
f_4 &=& F_4 - F \\
d &=& E - F
\end{array}\right\}$$

les équations de condition s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
e_1 - f_1 + d &=& a_1 \\
e_2 - f_1 + d &=& a_2 \\
e_2 - f_2 + d &=& a_3 \\
e_3 - f_2 + d &=& a_4 \\
e_3 - e_4 &=& a_5 \\
f_3 - e_4 - d &=& a_6 \\
f_3 - e_5 - d &=& a_7 \\
f_4 - e_5 - d &=& a_8 \\
f_4 - e_6 - d &=& a_9 \\
e_1 - e_6 &=& a_{10}
\end{array}\right. . \qquad (1)$$

$$(3) \qquad \left[\begin{array}{c:c} A^T A & C^T \\ \hdashline C & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right] \times \hat{X} = \left[\begin{array}{c} A^T a \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Posons $\left[\begin{array}{c:c} A^T A & C^T \\ \hdashline C & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right] = M$ (13 lignes et 13 colonnes) et introduisons la matrice A' (10 lignes, 13 colonnes) obtenue en bordant A (10 lignes, 11 colonnes) à droite de 2 colonnes de zéros ; on a alors :

$$\left[\begin{array}{c} A^T a \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array}\right] = A'^T a .$$

Le système linéaire (3) s'écrit alors (sous chaque matrice on va indiquer le nombre de lignes et le nombre de colonnes) :

$$\underset{(13\times 13)}{M} \times \underset{(13\times 1)}{\hat{X}} = \underset{(13\times 10)}{A'^T} \underset{(10\times 1)}{a} .$$

Dans notre exemple, nous avons :

$$M = \begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 8 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Solutions

Les comparaisons effectuées sont telles que, compte tenu des relations imposées, la résolution du système (3) soit possible. Cela revient à dire que M est inversible. On a alors :

$$\underset{(13\times 1)}{\hat{X}} = \underset{(13\times 13)}{M^{-1}} \times \underset{(13\times 10)}{A'^T} \underset{(10\times 1)}{a} .$$

Le produit de matrices étant associatif, cela peut être écrit :

$$\underset{(13\times 1)}{\hat{X}} = \underset{(13\times 10)}{B} \times \underset{(10\times 1)}{a} \qquad \text{avec} \qquad B = M^{-1} \times A'^T .$$

Les matrices M^{-1} et B sont données, pour notre exemple, à la page suivante.

On voit donc que, pour un schéma de comparaison donné, on peut calculer B une fois pour toutes. On obtient alors les meilleurs estimateurs des inconnues en faisant le produit par cette matrice de la matrice colonne des observations. (Ce produit fournit aussi les 2 inconnues auxiliaires λ_1 et λ_2 ; on constate d'ailleurs qu'elles sont nulles.)

Cette méthode de calcul est employée dans le programme CAPRW pour tous les schémas de comparaisons envisagés (les matrices B sont mémorisées sur le disque).

Écarts résiduels

A partir des estimateurs des inconnues, on peut déterminer les "valeurs calculées" des observations. Soit v cette matrice colonne (10 lignes). On a :

$$\underset{(10\times1)}{v} = \underset{(10\times13)}{A'} \times \underset{(13\times1)}{\hat{X}} = \underset{(10\times13)}{A'} \times \underset{(13\times10)}{B} \times \underset{(10\times1)}{a} .$$

Soit r la matrice colonne des écarts résiduels. On a (avec I = matrice unité) :

$$\underset{(10\times1)}{r} = a - v = I \times a - A' \times B \times a$$

$$= \left\{ \underset{(10\times10)}{I} - \underset{(10\times10)}{A' \times B} \right\} \times \underset{(10\times1)}{a} = \underset{(10\times10)}{R} \times \underset{(10\times1)}{a}$$

La matrice R peut être calculée a priori. Les écarts résiduels s'en déduisent aisément connaissant les observations. Cette matrice est donnée à la page précédente pour notre exemple.

On voit que les écarts résiduels sont les mêmes, en valeur absolue, pour toutes les observations et que les signes sont alternés. Il suffit donc de calculer celui qui est relatif à la première observation. Il est égal à :

$$\frac{1}{10}\left(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10}\right),$$

c'est-à-dire à l'"erreur de fermeture" divisée par le nombre de mesures. Cette propriété est commune à tous les schémas de comparaison étudiés pourvu qu'ils puissent être représentés par un diagramme analogue à celui de la figure c'est-à-dire constitué d'un cycle unique.

Naturellement, les conclusions de cette étude subsistent pour un schéma de comparaison quelconque (notamment avec un nombre accru de comparaisons) : possibilité de calculer a priori les matrices M, M^{-1}, B et R. Si le nombre d'observations est suffisamment grand pour justifier ce calcul, il est facile de calculer la variance d'une observation ainsi que les variances et covariances des inconnues.

Sèvres, 1er octobre 1975