

Caractérisation des fluctuations aléatoires
d'un processus temporel par la variance d'Allan*

par J. AZOUBIB

Bureau International des Poids et Mesures

Abstract.- The frequency stability of oscillators is characterized in the Fourier frequency domain by the spectral density of frequency fluctuations and, in the time domain, by the Allan variance. We extend the use of this variance to characterize the random fluctuations of a time process $a(t)$ which has a power law spectral density. As an application, the systematic errors linked to the determination of the coordinates of the pole are studied using such a characterization.

Résumé.- L'instabilité de fréquence des oscillateurs est caractérisée dans le domaine fréquence (de Fourier) par la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence et dans le domaine temps par la variance d'Allan. Nous faisons ici une extension de l'utilisation de cette variance pour caractériser les fluctuations aléatoires d'un processus temporel $a(t)$ dont la densité spectrale de puissance est proportionnelle à f (f étant les fréquences de Fourier introduites par l'analyse spectrale). Une application est faite à l'étude des erreurs systématiques liées à la détermination des coordonnées du pôle.

I. INTRODUCTION

Pour caractériser l'instabilité des fluctuations d'un processus temporel $a(t)$, nous utiliserons les mêmes grandeurs que celles qui sont conseillées par le Sous-Comité du Groupe IEEE [1] pour caractériser l'instabilité de fréquence des oscillateurs : la densité spectrale de puissance dans le domaine fréquence et la variance d'Allan dans le domaine temps. Nous faisons ainsi une extension de l'utilisation de la variance d'Allan.

Ecrivons $a(t)$ à la date t comme suit :

$$a(t) = a_0(t) + D(t) + y(t) \quad (1)$$

* Exposé présenté au B.I.P.M. le 26 novembre 1974.

J. Azoubib est détaché au Bureau International de l'Heure, Paris.

$D(t)$ est l'évolution systématique ou dérive de $a(t)$,

$y(t)$ est la partie aléatoire de $a(t)$,

$a_0(t)$ est la valeur idéale de $a(t)$, c'est-à-dire la valeur que prendrait $a(t)$ s'il n'y avait ni dérive, ni fluctuations aléatoires. Pour un générateur, par exemple, si l'on s'intéressait à sa fréquence de sortie, $a_0(t)$ serait sa fréquence nominale ν_0 .

Dans la pratique, des difficultés existent pour apprécier le terme de dérive $D(t)$ et par suite il est difficile de dissocier $D(t) + y(t)$. Cependant, d'un point de vue théorique rien ne s'oppose à faire cette décomposition, et il est utile de la faire pour isoler la partie aléatoire $y(t)$ sur laquelle porte l'étude. En effet, l'étude de l'instabilité de $a(t)$, c'est l'étude de la partie aléatoire de $a(t)$, c'est-à-dire de $y(t)$.

II. DÉFINITIONS DE L'INSTABILITÉ DE $a(t)$

1. Dans le domaine fréquence

L'instabilité de $a(t)$ est caractérisée dans le domaine fréquence par les valeurs de la densité spectrale (unilatérale) de puissance des $y(t)$, c'est-à-dire par

$$S_Y(f) = 4 \int_0^{\infty} R_Y(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad (2)$$

où $R_Y(\tau) = \langle y(t) y(t - \tau) \rangle$ est la fonction d'autocorrélation de $y(t)$. f représente les fréquences de Fourier introduites par l'analyse spectrale.

On rencontre couramment des densités spectrales du type $S_Y(f) = h_\alpha f^\alpha$. Les valeurs intéressantes de α sont $-2, -1, 0, 1$ et 2 . Le bruit blanc correspond à $\alpha = 0$, le bruit de scintillation à $\alpha = -1$. Le bruit affectant réellement $y(t)$ est une combinaison de ces divers bruits, l'un ou l'autre dominant sur un intervalle de fréquence donné.

2. Dans le domaine temps

La définition de l'instabilité de $a(t)$ dans le domaine temps se rapporte aux quantités \bar{y}_i définies par

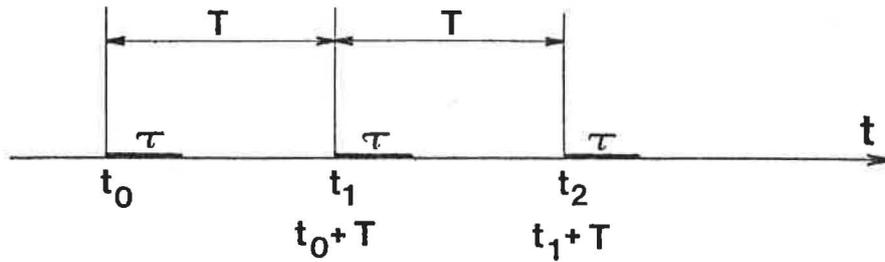
$$\bar{y}_i = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i + \tau} y(t) dt, \quad (3)$$

qui sont des moyennes de $y(t)$ sur un intervalle de temps τ .

Dans la relation (3)

$$t_{i+1} = t_i + T, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

t_0 est arbitraire et T est l'intervalle de répétition des mesures de durée τ . De façon schématique, cela est représenté par la figure suivante :



La définition proposée pour mesurer l'instabilité de $a(t)$ dans le domaine temps est

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{1}{N-1} \left\langle \sum_{i=1}^N \left(\bar{y}_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle \quad (4)$$

C'est la variance introduite par Allan [2]. Le choix du facteur $\frac{1}{N-1}$ provient du fait que dans le cas de mesures non corrélées, on obtient avec $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ une estimation sans biais de la variance vraie [3].

Pour des raisons d'ordre aussi bien pratique que théorique, comme nous le verrons par la suite, la définition conseillée [1] est

$$\langle \sigma_y^2(N = 2, T = \tau, \tau) \rangle .$$

Son expression s'écrit

$$\langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle = \left\langle \frac{(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2}{2} \right\rangle \equiv \sigma_y^2(\tau) \quad (5)$$

Son nom consacré par l'usage est "variance d'Allan". Pour estimer $\sigma_y^2(\tau)$, on effectue une simple moyenne à partir d'un nombre fini ($m + 1$) de valeurs de \bar{y}_i

$$\sigma_y^2(\tau) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2}{2} \quad (6)$$

Bien entendu, une incertitude due au nombre fini de mesures résulte de cette estimation.

III. RELATION ENTRE $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ ET $S_y(f)$

La relation qui permet de calculer l'instabilité dans le domaine temps connaissant l'instabilité dans le domaine fréquence s'écrit

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \pi f N \tau}{N^2 \sin^2 \pi f \tau} \right\} df \quad (7)$$

avec $r = T/\tau$.

Voici les différentes hypothèses introduites et les différentes étapes du calcul pour aboutir à cette relation [1].

On part de la définition de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$ que l'on transforme en

$$\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle = \frac{1}{N-1} \left\langle \sum_{n=1}^N \bar{y}_n^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{y}_i \bar{y}_j \right\rangle \quad (8)$$

On remplace ensuite :

$$\bar{y}_n \text{ par } \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_n+\tau} y(t) dt \quad \text{et} \quad (9)$$

$$\bar{y}_n^2 \text{ par } \frac{1}{\tau^2} \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt' y(t') y(t'')$$

En utilisant la linéarité de la moyenne, on arrive à l'expression

$$\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle = \frac{1}{(N-1)\tau^2} \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt'' \int_{t_n}^{t_n+\tau} dt' \langle y(t') y(t'') \rangle \right. \\ \left. - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{t_i}^{t_i+\tau} dt'' \int_{t_j}^{t_j+\tau} dt' \langle y(t') y(t'') \rangle \right\} \quad (10)$$

On met ainsi en évidence la quantité

$$\langle y(t') y(t'') \rangle = R_y (t' - t''),$$

qui est la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.

Comme la fonction d'autocorrélation de $y(t)$ est la transformée de Fourier de la densité spectrale de puissance $S_y (f)$, c'est-à-dire

$$R_y (t'-t'') = \int_0^{\infty} S_y (f) \cos 2\pi f (t'-t'') df \quad (11)$$

on arrive à introduire $S_y (f)$ dans l'expression (10) de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$.

En fait, ceci n'est correct que si $y(t)$ est stationnaire et si la moyenne $\langle y(t') y(t'') \rangle$ existe.

Après intégration des expressions en t' et t'' , et calcul des sommes sur i, j et n , on aboutit à l'expression (7).

IV. CHOIX DU MODÈLE $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$ ET DIAGRAMME α - μ

L'expression (7) de $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ précédemment obtenue est encore trop générale pour qu'elle puisse se prêter à la discussion. Il est nécessaire d'explicitier $S_y(f)$ en faisant un choix convenable de modèles. Choisissons le modèle $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$. Nous pouvons maintenant expliciter la dépendance en τ de la variance d'Allan.

En posant $\pi f \tau = u$, la relation (7) s'écrit

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{(N-1)\pi\tau} \int_0^\infty S_y\left(\frac{u}{\pi\tau}\right) A(u) du \quad (12)$$

$$\text{avec } A(u) = \frac{\sin^2 u}{u^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 Nru}{N^2 \sin^2 ru} \right\}$$

Lorsque u tend vers zéro, $A(u)$ est équivalent à u^2 . Lorsque u tend vers l'infini, $A(u)$ est équivalent à u^{-2} . Comme

$S_y\left(\frac{u}{\pi\tau}\right) = \frac{h_\alpha}{(\pi\tau)^\alpha} u^\alpha$, on voit que la fonction à intégrer est

équivalente à $u^{\alpha+2}$ lorsque u tend vers zéro,

équivalente à $u^{\alpha-2}$ lorsque u tend vers l'infini.

Ceci donne par intégration :

$u^{\alpha+3}$ pour u tendant vers zéro (basses fréquences),

$u^{\alpha-1}$ pour u tendant vers l'infini (hautes fréquences).

Ainsi pour $\alpha+3 > 0$ et $\alpha-1 < 0$, c'est-à-dire $-3 < \alpha < 1$, on peut calculer $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ puisque dans ce cas l'intégrale converge.

Donc pour $-3 < \alpha < 1$:

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N h_\alpha}{(N-1)(\pi\tau)^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha A(u) du \quad (13)$$

que l'on écrit

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \tau^\mu h_\alpha C_\alpha \quad (14)$$

avec $\mu = -\alpha - 1$

et

$$C_\alpha = \frac{N}{(N-1)\pi^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha A(u) du \quad (15)$$

Discutons le cas $\alpha \geq 1$:

Ecrivons la relation (7) comme suit

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \tau^{-2} \int_0^\infty S_y(f) f^{-2} \frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \pi r f N \tau}{N^2 \sin^2 \pi r f \tau} \right\} df$$

Puisque $\alpha \geq 1$, l'intégrale ne converge pas. On doit donc faire intervenir des fréquences de coupure. En fait, la fréquence f_h (coupure haute fréquence) suffit car aux basses fréquences il n'y a pas de problème.

L'expression $\frac{\sin^2 \pi f \tau}{\pi^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \pi r f N \tau}{N^2 \sin^2 \pi r f \tau} \right\}$ peut être écrite

comme la somme de termes constants et de termes oscillants. Si $2\pi f_h \tau \gg 1$, les termes oscillants contribuent très peu à l'intégrale ; seuls les termes constants contribuent de façon importante. On obtient donc une variation de

$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ en fonction de τ en τ^{-2} .

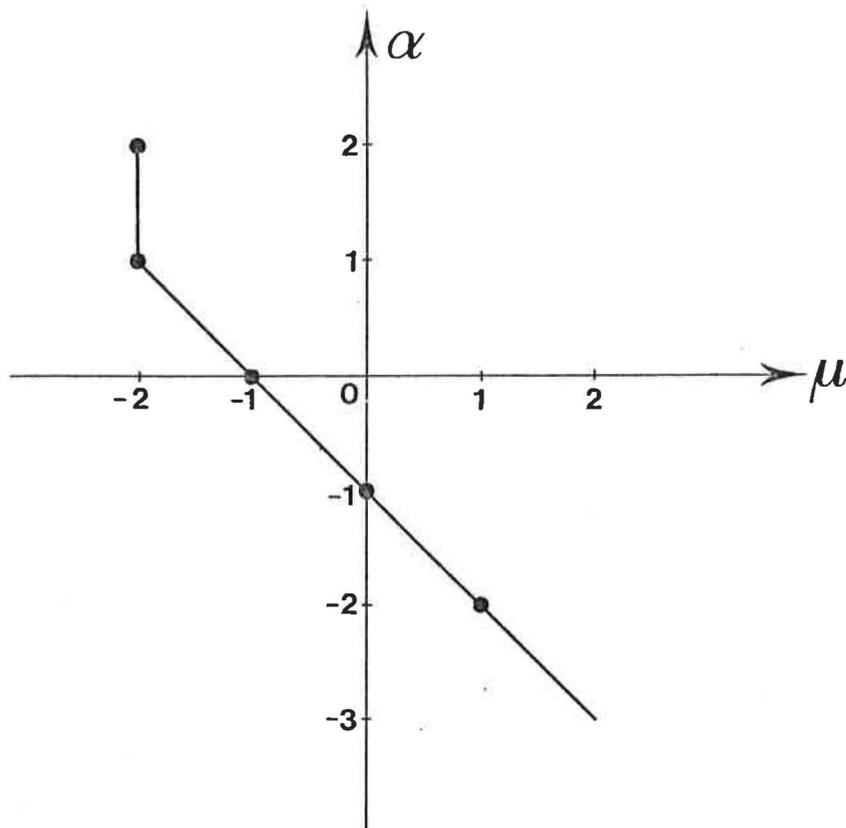
En résumé :

$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$ est proportionnel à τ^μ

avec $\mu = -\alpha - 1$, si $-3 < \alpha < 1$

et $\mu = -2$, si $\alpha \geq 1$.

Ce résultat nous permet de dessiner le graphe $\alpha - \mu$:



En gardant N constant et en supposant que μ reste constant pour τ variant dans un intervalle raisonnable, on voit que μ est la pente de la droite

$$\ln \langle \sigma_Y^2 (N, T, \tau) \rangle = \mu \ln \tau + \ln h_\alpha C_\alpha \quad (16)$$

C'est un moyen simple pour déterminer la densité spectrale de puissance en faisant varier le temps d'échantillonnage τ dans l'intervalle considéré [4].

V. CHOIX DE $\sigma_Y^2(\tau)$ POUR CARACTERISER LES FLUCTUATIONS DE $a(t)$

Nous avons parlé dans le paragraphe précédent d'un moyen simple pour déterminer la densité spectrale de puissance en faisant varier le temps d'échantillonnage τ . En fait, nous pensions à l'utilisation de

$\langle \sigma_Y^2 (2, \tau, \tau) \rangle \equiv \sigma_Y^2(\tau)$ et non pas à $\langle \sigma_Y^2 (N, T, \tau) \rangle$. Ceci nous amène à donner les raisons du choix de $\sigma_Y^2(\tau)$ pour caractériser dans le domaine temps les fluctuations aléatoires d'un processus temporel.

1. Simplicité de calcul

Il est évidemment plus simple de calculer $\sigma_Y^2(\tau)$ que de calculer $\langle \sigma_Y^2 (N, T, \tau) \rangle$.

2. Convergence

$\langle \sigma_Y^2 (N, T, \tau) \rangle$ diverge pour certains bruits, c'est-à-dire que $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_Y^2 (N, T, \tau) \rangle$ n'existe pas toujours.

Ce n'est pas le cas pour $\sigma_Y^2 (\tau)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{2}$$

existe toujours pour les bruits envisagés.

3. Comparaisons entre laboratoires

L'utilisation de $\sigma_Y^2 (\tau)$ par la plupart des laboratoires intéressés permet d'effectuer des comparaisons entre les divers résultats. Bien entendu, ces comparaisons n'auront un sens que si le nombre $(m + 1)$ de mesures, et éventuellement d'autres paramètres, sont précisés.

VI. INCERTITUDE DUE AU NOMBRE FINI DE MESURES [5]

Puisque le nombre de mesure est fini, la variance d'Allan définie comme une moyenne d'ensemble des $(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2 / 2$ ne peut être calculée exactement. On effectue donc dans la pratique des estimations de cette variance. Il en résulte une incertitude qui va dépendre du nombre de mesures.

Soit $\sigma_Y^2 (\tau, m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2}{2}$ une estimation de $\sigma_Y^2 (\tau) = \langle \frac{(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i)^2}{2} \rangle$ à partir de $(m+1)$ mesures.

$$\text{Notons } \delta = \frac{\sigma_Y^2 (\tau, m) - \sigma_Y^2 (\tau)}{\sigma_Y^2 (\tau)} .$$

Lesage et Audoin [5] ont montré, en prenant le modèle $S_Y(f) = h_\alpha f^\alpha$ pour densité spectrale de puissance, que si $\delta \ll 1$, alors $\sigma(\delta) \approx K_\alpha m^{-1/2}$ avec une précision de 10 % pour $m > 10$.

La vérification expérimentale a été effectuée en utilisant un oscillateur à quartz de haute qualité comme source de fréquence.

Pour $\alpha = -1$ (bruit de scintillation de fréquence) l'expérience a donné $K_{-1} = 1,07$, la valeur théorique étant 1,19.

Pour $\alpha = 2$ (bruit blanc de phase) l'expérience a donné $K_2 = 0,97$, la valeur théorique étant 0,99.

La théorie et l'expérience semblent en bon accord.

VII. DÉPENDANCE EN N de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$

Dans l'expression de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$ nous avons seulement explicité la dépendance en τ . Il est possible de calculer pour chaque de type de bruit l'expression de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$ en fonction de N, T et τ . Ces calculs sont longs et compliqués ; les résultats se trouvent dans [1].

La dépendance en N de $\langle \sigma_y^2 (N, T, \tau) \rangle$ peut être utilisée pour déterminer μ et par suite la densité spectrale de puissance. Dans ce but, on utilise la fonction

$$\chi(N, \mu) = \frac{\langle \sigma_y^2 (N, \tau, \tau) \rangle}{\sigma_y^2 (\tau)}$$

qui est tabulée [6].

On calcule $\chi(N, \mu)$ et l'on cherche dans la table à la colonne N la valeur correspondante qui se trouve à la ligne μ .

VIII. APPLICATION A L'ÉTUDE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES LIÉES A LA DÉTERMINATION DU MOUVEMENT DU PÔLE ET DE LA ROTATION DE LA TERRE

Les coordonnées du pôle instantané sont issues de la combinaison des résultats des observations astronomiques d'environ 70 laboratoires.

Ces résultats se présentent sous la forme suivante :

$$C(t) = a + b_1 \sin 2\pi (t_1 - \phi_1) + b_2 \cos 4\pi (t_2 - \phi_2),$$

où C(t) est le résidu des observations ;

a, b_1 , ϕ_1 , b_2 et ϕ_2 sont déterminés annuellement pour chaque laboratoire ;

a est l'écart moyen ;

b_1 et ϕ_1 sont respectivement l'amplitude et la phase de la composante annuelle de l'écart ;

b_2 et ϕ_2 sont respectivement l'amplitude et la phase de la composante semi-annuelle de l'écart.

- Les nombres analysés ont un rapport signal/bruit qui est faible.

- Le nombre d'échantillons est petit (12 échantillons).

Cet inconvénient est assez bien comblé par le nombre élevé d'instruments.

Pour caractériser le bruit affectant les termes a , b_1 et b_2 , nous allons utiliser la variance d'Allan en prenant comme densité spectrale de puissance le modèle $h_\alpha f^\alpha$. La méthode employée pour déterminer les différents α est celle du paragraphe VII. Les résultats des calculs sont présentés dans le tableau I qui donne les valeurs moyennes de α pour chaque catégorie d'instruments. Les termes a , b_1 et b_2 sont relatifs à la latitude et les termes a' , b'_1 et b'_2 à la longitude. Les observations de tous ces instruments sont en fait sensibles aux mêmes effets perturbateurs généraux, qui sont, par exemple, l'exactitude des catalogues d'étoiles, les changements des conditions météorologiques pour les termes b_1 et b_2 , les changements fortuits (irréversibles) des conditions d'utilisation pour le terme a .

TABLEAU I

Catégories d'instruments	Valeurs de α pour les différents termes					
	a	b_1	b_2	a'	b'_1	b'_2
Astrolabes de Danjon	- 1,10	- 0,41	- 0,49	- 0,92	- 0,41	- 0,17
P.Z.T. (photographic zenithal tube)	- 1,09	- 0,71	+ 0,22	- 1,13	- 0,41	+ 0,03
Lunettes zénithales	- 0,66	- 0,45	- 0,25			
Instruments des passages				- 0,97	- 0,61	- 0,20
Instruments des passages photoélectriques				- 1,04	- 0,96	- 0,42

Considérons la moyenne générale (instruments d'une part, longitude et latitude confondus d'autre part). On obtient

pour A : $\alpha = - 0,98$

pour B_1 : $\alpha = - 0,56$

pour B_2 : $\alpha = - 0,18$

Voyons comment ces résultats peuvent nous aider à caractériser les incertitudes liées à la détermination du mouvement du pôle et de la rotation de la Terre.

Le terme A pour lequel la valeur de α est de l'ordre de - 1 est affecté d'un bruit de scintillation. Ce résultat est en accord avec la méthode de simulation de bruit de scintillation conçue par Barnes [7] : sauts d'amplitude aléatoires à des dates aléatoires.

Le bruit affectant le terme B_2 est très proche du bruit blanc. On peut donc penser que cette harmonique a une amplitude faiblement significative. C'est l'illustration extrême de la remarque concernant le rapport signal/bruit.

Quant à l'amplitude B_1 du terme annuel, elle est affectée d'un bruit intermédiaire. L'interprétation de ce résultat est beaucoup moins évidente que celle des précédents.

IX. CONCLUSION

Nous avons déjà cité les avantages de la variance d'Allan en expliquant les raisons de son choix pour caractériser les fluctuations aléatoires des processus temporels. Cependant, le fait que $\sigma_y^2(\tau)$ soit proportionnelle à τ^{-2} pour $\alpha \geq 1$ montre que la variance d'Allan ne permet pas de faire la distinction entre les différentes valeurs de α qui sont supérieures ou égales à 1. Cette distinction peut être effectuée par la variance de Hadamard. Pour les valeurs de α strictement inférieures à 1, la variance d'Allan permet de déterminer α en faisant varier soit le temps d'échantillonnage τ , soit le nombre d'échantillons N . L'application à l'étude des erreurs systématiques liées à la détermination du mouvement du pôle met nettement en évidence le bruit de scintillation qui affecte les termes a et a' .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARNES (J.A.) et al., Characterization of frequency stability. NBS Technical Note N° 394, October 1970.
- [2] ALLAN (D.W.), Statistics of atomic frequency standards. Proceedings IEEE, 54, N° 2, Feb. 1966, p. 221.
- [3] RUTMAN (J.), Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne (Thèse de Doctorat d'État, Paris 1972).
- [4] SEARLE (C.L.), POSNER (R.D.), BADESSA (R.S.) and BATES (V.J.), Computer aided calculation of frequency stability. In "Proc. Symp. on the definition and measurement of short-term frequency stability", 1964 Washington D.C., U.S. Govt. Printing Office, NASA SP-80, p. 273.
- [5] LESAGE (P.) et AUDOIN (C.), Characterization of frequency stability : Uncertainty due to the finite number of measurements. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, IM-22, N° 2, June 1973, p. 157.
- [6] BARNES (J.A.), Tables of bias functions, B_1 and B_2 , for variances based on finite samples of processes with power law spectral densities. NBS Technical Note N° 375, Jan. 1969.
- [7] BARNES (J.A.), The generation and recognition of flicker noise. NBS Report N° 9284, June 1967.

