

Sur l'arrangement en série de deux temps morts de types différents

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures

1. Introduction

Parmi les quatre combinaisons en série que l'on peut former de deux temps morts dont chacun est du type étendu (E) ou non étendu (N), les deux cas "purs", c'est-à-dire les arrangements N-N et E-E ont été traités précédemment en quelque détail [1, 2]. A vrai dire, les résultats principaux pour les cas "mixtes", représentés par N-E et E-N, ont déjà été indiqués [3], mais sans preuves. Puisque le cas E-N a pu être considérablement simplifié depuis, nous exposons brièvement ici les raisonnements qui permettent d'y parvenir, complétant ainsi la présentation de ces problèmes donnée dans [3], article auquel on pourra se référer pour mieux situer ces études, de même que pour les conclusions générales concernant les quatre cas.

2. Notations

τ_1 et τ_2 désigneront toujours respectivement le premier et le deuxième temps mort à franchir par les impulsions formant originalement un processus de Poisson avec taux de comptage ρ . L'abréviation $\alpha = \tau_1/\tau_2$ sera utilisée pour le rapport des temps morts, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, et l'on posera, pour simplifier, $\rho\tau_2 = x$. Le taux de comptage à la sortie de l'arrangement est en général appelé R, mais aussi

- ρ_1 si τ_1 est seul, ou pour $\alpha = 1$, et
- ρ_2 si τ_2 est seul, donc pour $\alpha = 0$.

Le schéma du dispositif est indiqué dans la figure 1.

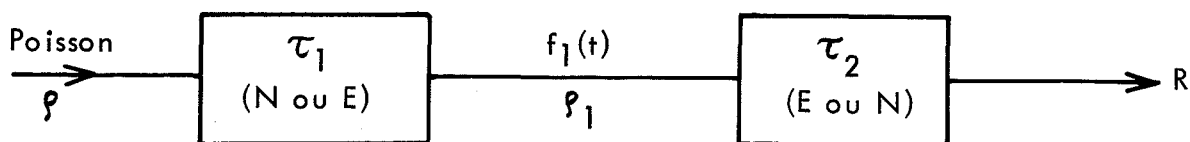


Fig. 1 - Dispositif général pour les arrangements N-E ou E-N de deux temps morts en série

3. La combinaison N-E

La densité des intervalles entre les impulsions qui ont franchi le premier temps mort τ_1 (du type N) est donnée par (voir par exemple équations 7 et 8 de [3])

$$f_1(t) = U(t - \tau_1) \cdot \rho \cdot e^{-\rho(t - \tau_1)} \quad (1)$$

et le taux de comptage correspondant est

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1 + \rho \tau_1} \quad (2)'$$

Puisqu'on suppose $\tau_2 \geq \tau_1$, la perte supplémentaire d'impulsions (en valeur relative) due au deuxième temps mort (du type E) est alors (voir Fig. 2, ou comparer à l'équation 2 de [3])

$$P = \int_0^{\tau_2} f_1(t) dt = \rho \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho(t - \tau_1)} dt = 1 - e^{-\rho(\tau_2 - \tau_1)} \quad (3)$$

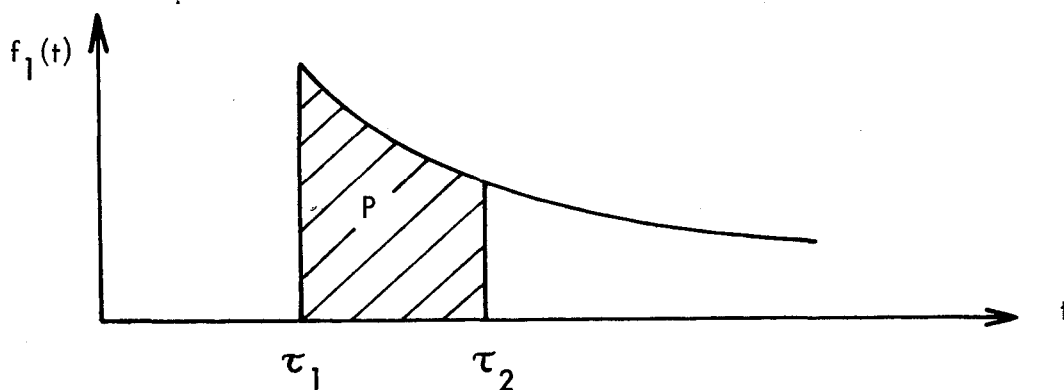


Fig. 2 - Densité des intervalles après τ_1 pour le cas N-E

Il s'ensuit pour le taux de comptage expérimental, après passage de la combinaison N-E des deux temps morts,

$$R = \rho_1(1 - P) = \frac{\rho}{1 + \rho\tau_1} \cdot e^{-\rho(\tau_2 - \tau_1)} = \frac{\rho}{1 + \alpha x} \cdot e^{-x(1 - \alpha)}, \quad (4)$$

où $\alpha \leq 1$, donc $\tau_2 \geq \tau_1$.

Il peut être intéressant de noter que cette relation a déjà été obtenue il y a longtemps par Ruark et Brammer [4], mais malheureusement ces auteurs pensaient qu'elle correspondait à l'arrangement N-N, erreur qui a été décelée et corrigée par Jost [5].

Pour $\tau_1 = 0$, on a

$$R = \rho_2 = \rho \cdot e^{-\rho\tau_2}. \quad (5)$$

Le facteur de transmission T qui décrit l'influence du premier temps mort τ_1 sur le taux de comptage final s'évalue donc à [3]

$$T \equiv \frac{R}{\rho_2} = \frac{e^{\rho\tau_1}}{1 + \rho\tau_1}. \quad (6)$$

Avec l'abréviation $\rho\tau_1 = \alpha x = y$, il s'exprime aussi par

$$\begin{aligned} T &= (1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \dots) \cdot (1 - y + y^2 - y^3 \pm \dots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k y^k, \end{aligned}$$

avec des coefficients

$$c_k = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{i!}, \quad (7)$$

donc

$$T = 1 + \frac{1}{2}(\rho\tau_1)^2 - \frac{1}{3}(\rho\tau_1)^3 + \frac{3}{8}(\rho\tau_1)^4 \mp \dots, \quad (8)$$

comme on l'a déjà indiqué dans [3].

4. La combinaison E-N

Ce cas peut être traité aisément en utilisant le raisonnement développé dans [6], si l'on prend pour processus régénératif de départ celui

qui se présente après le premier temps mort τ_1 . Cela nous évitera de faire des calculs fastidieux (en utilisant l'équation (6) de [3]) avec des densités d'intervalles qui seraient maintenant beaucoup moins commodes que ce n'était le cas pour la combinaison N-N dans [1].

Le calcul se fait en deux étapes. La déformation du processus de Poisson original par un temps mort cumulatif τ_1 est bien connue. En particulier, nous nous intéressons ici à la densité totale $D(t)$ de tous les événements qui suivent une impulsion enregistrée. Elle est donnée par (équation (8) de [7])

$$D(t) = U(t - \tau_1) \cdot \rho \cdot e^{-\rho \tau_1} = U(t - \tau_1) \cdot \rho_1, \quad (9)$$

puisque maintenant

$$\rho_1 = \rho \cdot e^{-\rho \tau_1}. \quad (10)$$

La transmission T_1 pour cette première étape est donc

$$T_1 \equiv \frac{\rho_1}{\rho} = e^{-\rho \tau_1}. \quad (11)$$

Pour la deuxième partie, déterminons d'abord les pertes produites par le temps mort τ_2 . En partant de (9), on obtient comme probabilité de perte S par impulsion enregistrée (après les deux temps morts)

$$S = \int_0^{\tau_2} D(t) dt = \rho_1 (\tau_2 - \tau_1), \quad (12)$$

comme on le déduit facilement de la figure 3.

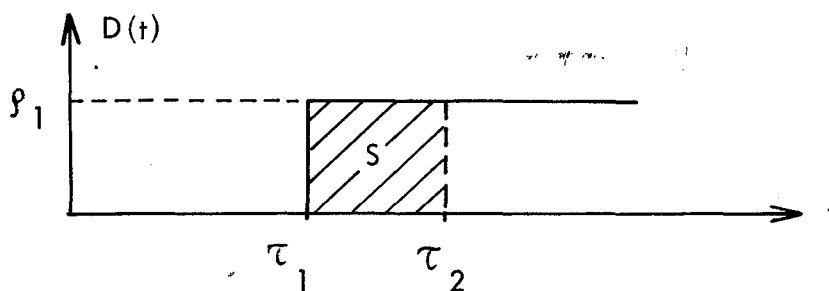


Fig. 3 - Détermination des pertes supplémentaires produites par τ_2

Le bilan général

$$\text{nouveau taux} = \text{ancien taux} - \text{pertes}$$

est donc pour cette deuxième étape

$$\rho_1 T_2 = \rho_1 - \rho_1 T_2 \cdot S, \quad (14)$$

où T_2 est la transmission correspondante. En insérant (12) dans (14), on obtient

$$T_2 = 1 - \rho_1 T_2 (\tau_2 - \tau_1),$$

d'où l'on tire

$$T_2 = \frac{1}{1 + \rho_1 (\tau_2 - \tau_1)}. \quad (15)$$

Puisque les pertes produites par les deux temps morts en série sont indépendantes, la transmission totale est égale à

$$T_{\text{tot}} = T_1 \cdot T_2. \quad (16)$$

En posant comme auparavant $\rho\tau_2 = x$, et donc $\rho\tau_1 = \alpha x$, nous arrivons avec (10), (11) et (15) à

$$T_{\text{tot}} = \frac{1}{e^{\alpha x} + (1 - \alpha) x}. \quad (17)$$

Le taux de comptage à la sortie est donné par $R = \rho \cdot T_{\text{tot}}$, et par $\alpha = 0$ on a évidemment $\rho_2 = \rho / (1 + \rho\tau_2)$.

La transmission T , qui est définie comme dans (6) et qui caractérise l'influence provenant de τ_1 seul, est donc

$$T \equiv \frac{R}{\rho_2} = T_{\text{tot}} (1 + \rho\tau_2) = \frac{1 + x}{(1 - \alpha) x + e^{\alpha x}}, \quad (18)$$

comme on l'a indiqué auparavant (équation 57 de [3]) pour ce cas.

5. Compléments

Il est évident que pour les combinaisons de deux temps morts en série traités ici on doit revenir aux simples types limites E ou N quand α est égal à 0 ou 1. Faisons donc rapidement ce simple contrôle. Avec (4) et (17) le taux de comptage à la sortie est

$$R = \begin{cases} \frac{\rho}{1 + \alpha x} \cdot e^{-(1 - \alpha) x} & \text{pour N-E,} \\ \frac{\rho}{(1 - \alpha) x + e^{\alpha x}} & \text{" E-N.} \end{cases}$$

Cela donne en effet

$$\begin{aligned}
 & \text{- avec } \underline{\alpha = 0}: R = \rho_2 = \begin{cases} \rho \cdot e^{-x} & \text{pour N-E} \\ \frac{\rho}{1+x} & \text{" E-N,} \end{cases} \\
 & \text{mais} \\
 & \text{- pour } \underline{\alpha = 1}: R = \rho_1 = \begin{cases} \frac{\rho}{1+x} & \text{pour N-E} \\ \rho \cdot e^{-x} & \text{" E-N} \end{cases} \quad (19)
 \end{aligned}$$

et correspond donc à ce qu'il faut attendre. De plus, l'ordre inverse des éléments en série pour les deux arrangements se reflète bien dans ces cas limites.

De façon analogue, on déduit à l'aide de (6) et (18), pour le facteur de transmission T décrivant l'influence de τ_1 ,

- dans le cas N-E:

$$T = \frac{e^{\alpha x}}{1 + \alpha x} = \frac{1 + \alpha x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!}}{1 + \alpha x} \gg 1,$$

tandis que

- dans le cas E-N:

$$T = \frac{1+x}{(1-\alpha)x + e^{\alpha x}} = \frac{1+x}{1+x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\alpha x)^i}{i!}} \leq 1,$$

et chaque fois l'égalité n'existe que pour les cas triviaux où l'on aurait $\alpha x = 0$. Ces observations sont en accord avec les règles générales énoncées dans [3].

Ajoutons finalement que parmi les quatre combinaisons de deux temps morts en série ce n'est que le cas N-N qui montre pour certaines valeurs* de α et ρ cette étonnante stabilité du taux de comptage R à la sortie par rapport à des changements du taux ρ à l'entrée du dispositif, effet dont une application éventuelle en horlogerie est actuellement étudiée [9].

* comme par exemple pour $\rho \tau \cong 8$ (de 5 à 11 environ) si $\alpha \cong 0,75$, ou aussi pour $\rho \tau \cong 14$ (de 10 à 18 environ) si $\alpha \cong 0,39$. Voir les courbes reproduites dans [8].

A vrai dire, on peut trouver des points de stabilisation en demandant $\partial R / \partial \rho = 0$. Ainsi, on arrive pour nos combinaisons, après un petit calcul, aux conditions suivantes:

- pour le cas N-E :

$$x^2 \cdot \alpha (1 - \alpha) + x \cdot (1 - \alpha) = 1 ,$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{1-\alpha}} - 1 \right) , \quad (21)$$

tandis que

- pour le cas E-N:

$$x = 1/\alpha . \quad (22)$$

Il s'ensuit pour $\alpha = 0$ dans le cas N-E (ou pour $\alpha = 1$ dans le cas E-N) qu'un seul temps mort du type E a déjà un effet stabilisateur si l'on choisit $x = 1$, ce qui est bien connu depuis longtemps (voir par exemple [10]).

Un temps mort non étendu, par contre, ne montre pas cet effet, ce qui découle aussi de (21) pour $\alpha = 1$ ou de (22) pour $\alpha = 0$.

Cependant, ce type de stabilisation est peu intéressant et nettement inférieur en qualité à celui qui peut être réalisé par la combinaison N-N qui permet aussi d'obtenir $\partial^2 R / \partial \rho^2 = 0$.

Références

- [1] J.W. Müller: "On the influence of two consecutive dead times", Rapport BIPM-106 (1968)
- [2] id.: "On the effect of two extended dead times in series", Rapport BIPM-72/9 (1972), et "Statistique de comptage d'événements aléatoires", Rapport BIPM-72/12 (1972)
- [3] id.: "Dead-time problems", Herceg Novi Conference (1972), sera publié dans Nuclear Instruments and Methods
- [4] A.E. Ruark, F.E. Brammer: "The efficiency of counters and counter circuits", Phys. Rev. 52, 322 (1937)
- [5] R. Jost: "Bemerkungen zur mathematischen Theorie der Zähler", Helv. Phys. Acta 20, 173 (1947)

- [6] J.W. Müller: "Une nouvelle méthode de calculer les pertes de comptage dues à un temps mort non cumulatif", Rapport BIPM-73/4 (1973)
- [7] id.: "Interval densities for extended dead times", Report BIPM-112 (1971), Recueil de Travaux du Bureau International des Poids et Mesures 3, 20
- [8] id., dans: Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux 36, 71 (1968)
- [9] E. Schnell, c/o Le Coultre et Cie S.A., Le Sentier (Suisse), communication personnelle
- [10] R.D. Evans: "The Atomic Nucleus" (McGraw-Hill, New York, 1955), p. 786.

(Juillet 1973)
