B. I. P. M.
F-92310 SEVRES

Rapport BIPM-73/4

UNE NOUVELLE MANIERE DE CALCULER LES PERTES DE COMPTAGE DUES A UN TEMPS MORT NON CUMULATIF

Jörg W. Müller

A part le simple cas d'un processus de Poisson, la détermination des pertes pour le taux de comptage provenant d'un temps mort du type non cumulatif a toujours posé des problèmes. Bien que l'exemple d'une densité d'intervalles exponentiels puisse le suggérer, l'influence d'un tel temps mort ne s'exprime en général ni par un simple décalage de la répartition originale, ni par une troncation avec renormalisation, comme on l'a pensé longtemps [1, 2]. Cette erreur a subsisté même après les premières tentatives de calcul des pertes dues à deux temps morts en série (par exemple RSI 11, 242 (1940), HPA 20, 173 (1947), Proc. Phys. Soc. 60, 549 (1948)), effet qui ne dépendrait que du plus grand des deux temps morts, si cette hypothèse était correcte. Or, le comportement réel est plus compliqué. Pour des impulsions formant un processus régénératif, une relation générale a été établie [3], dans laquelle on construit d'abord la nouvelle densité F(t) d'intervalles à partir de la densité originale f(t) en utilisant

$$F(t) = U(t - t) \cdot \left\{ f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau} f_k(x) \cdot f(t - x)\, dx \right\} , \qquad (1)$$

où $f_k(t) \equiv \left\{ f(t) \right\}^{*k}$ est l'auto-convolution de f(t) et donne la densité pour un intervalle d'ordre k.

Le nouveau taux de comptage R est alors l'inverse de l'intervalle moyen, donc

$$R = 1/\bar{t} \quad , \qquad \text{avec} \quad \bar{t} = \int_0^{\infty} t \cdot F(t)\, dt \quad .$$

Malheureusement, la relative complexité de (1) a sévèrement limité le nombre d'applications utiles. A part les simples cas d'un processus de Poisson (source radioactive) ou d'un train régulier d'impulsions (générateur) – qui se traitent correctement sans aucune méthode théorique –, on a ainsi étudié les pertes de comptage produites par un temps mort dans un processus poissonien après division par un facteur fixe (passage par une échelle) ou après avoir déjà imposé un premier temps mort [4].

Mais de plus, l'hypothèse du caractère régénératif du processus à étudier est gênante car elle ne correspond pas toujours à la réalité. Ainsi des cas d'intérêt pratique comme la superposition d'une fréquence fixe à un processus poissonien, souvent utilisée pour la mesure précise de la valeur du temps mort, ou une suite d'impulsions à corrélation interne (problème mère-fille, impulsions secondaires) ne pouvaient pas être traités par des méthodes éprouvées.

Or, il nous est récemment apparu que le détour par la nouvelle densité $F(t)$ n'était pas vraiment nécessaire pour obtenir le taux de comptage final R, car il est possible de calculer directement le taux des pertes.

Dans ce but, on subdivise d'abord l'ensemble du processus original en k classes, c'est-à-dire autant qu'il paraît nécessaire pour assurer que toutes les impulsions appartenant à la même classe se comportent, statistiquement parlant, de la même manière. En particulier, cela implique la même probabilité de "survie" (ou transmission) pour les événements d'une classe.

Considérons maintenant la classe j et déterminons la totalité des pertes L_j d'impulsions de ce type j. Evidemment, toutes les pertes sont produites par les temps morts imposés par des impulsions enregistrées. Pour calculer les pertes (en j) produites par une impulsion comptée du type j', il faut d'abord évaluer la densité totale

$$D(j \mid j'; t) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r(j \mid j'; t) , \qquad (2)$$

où $g_r(j \mid j'; t)$ est la densité pour l'événement numéro r de la classe j (dans la série originale), si l'origine de temps (début du temps mort) est déterminée par une impulsion appartenant à la classe j'.

A première vue, cela peut paraître assez compliqué et peu prometteur. Dans la plupart des cas pratiques, cependant, ces sommes s'évaluent aisément. En particulier, si les différentes classes ont été choisies de manière à ce qu'elles soient indépendantes les unes des autres, on a

$$D(j \mid j'; t) = \rho_j \cdot U(t) , \qquad \text{pour } j \neq j' , \qquad (3)$$

où ρ_j est le taux de comptage original pour la classe j. Si la classe j forme un processus poissonien, ce résultat est aussi valable pour $j = j'$; sinon, il faut évaluer

$$D(j\,|\,j;\,t) \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} f_r(t) \;, \tag{4}$$

où $f_r(t)$ est la densité d'intervalles d'ordre r entre impulsions de la classe j.

Si nous désignons par T_s la probabilité de survie (ou transmission) pour une impulsion du type s, l'ensemble des pertes d'impulsions ayant appartenu à la classe j s'évalue par unité de temps à

$$L_s \;=\; \sum_{s=1}^{k} \rho_s \cdot T_s \int_0^{\tau} D(j\,|\,s;\,t)\;dt \;. \tag{5}$$

Puisque les transmissions T_s ne sont pas connues, cette manière d'aborder le problème pourrait ressembler aux tentatives courageuses, mais pourtant désespérées du baron de Münchhausen qui, pour sortir du marécage, se tirait par ses propres bottes. Néanmoins, ce procédé du type "bootstrap" peut s'écrire sous forme d'autant d'équations qu'il y a d'inconnues T_s, car pour chaque classe j le taux de comptage final s'exprime par

$$T_j \cdot \rho_j \;=\; \rho_j - L_j \;, \qquad j = 1, 2, \ldots, k \;. \tag{6}$$

Ce système d'équations permet de déterminer les transmissions partielles T_j, soit directement ou par itération, soit, s'il se révèle trop compliqué, au moins de façon approximative.

La transmission globale T pour l'ensemble du processus étudié, qui équivaut à la détermination du taux de comptage R après insertion du temps mort, s'obtient alors par

$$R \;=\; \rho \cdot T \;=\; \rho - L \;, \tag{7}$$

où $\rho = \sum_{j=1}^{k} \rho_j$ et $L = \sum_{j=1}^{k} L_j$.

Pour certains problèmes, la subdivision en classes peut être difficile. Dans ce cas, il vaut mieux introduire plus de classes qu'il n'est absolument nécessaire, car on se rend facilement compte en examinant le système d'équations (6) s'il y a des classes qui correspondent à la même transmission partielle T_j et qui peuvent donc être réunies.

A l'aide de cette technique de calcul nous avons récemment traité les pertes de comptage pour le processus du type "mère-fille" et pour la superposition d'impulsions provenant d'une source et d'un oscillateur [5] . Or, ces exemples sont trop longs pour être exposés ici en détail et feront l'objet de rapports ultérieurs. Pour illustrer le procédé, nous devons nous contenter pour le moment de l'appliquer dans le cas trivial d'un processus de Poisson, quoique nous nous rendions bien compte que cette méthode n'est pas nécessaire pour y arriver.

Pour un processus de Poisson il suffit de considérer une seule classe. Puisque la densité d'intervalles entre événements consécutifs est alors

$$g_1(j\,|\,j';\,t) = f(t) = \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot U(t)$$

et
$$g_r(t) = \left\{f(t)\right\}^{*r} = \frac{\rho\,(\rho t)^{r-1}}{(r-1)\,!} \cdot e^{-\rho t} \cdot U(t) \quad , \qquad (8)$$

on trouve avec (2) pour la densité totale

$$D(t) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r(t) = \rho \cdot e^{-\rho t} \cdot U(t) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\rho t)^r}{r\,!} = \rho \cdot U(t) \,. \qquad (9)$$

La perte en taux de comptage est, avec (5)

$$L = \rho\, T \int_0^{\tau} D(t)\, dt = \rho^2\, T\, \tau \qquad (10)$$

et le bilan (7) est donc simplement

$$\rho\, T = \rho - L = \rho - \rho^2\, T\, \tau \quad . \qquad (11)$$

Il en découle

$$T = \frac{1}{1 + \rho\tau}$$

ou
$$R = \rho \cdot T = \frac{\rho}{1 + \rho\tau} \quad , \qquad (12)$$

formule bien connue pour le taux de comptage dans le cas où un temps mort τ du type non cumulatif a été inséré dans un processus de Poisson à taux original ρ .

Dans cet exemple, on a sans doute l'impression de faire les mêmes calculs que dans le raisonnement élémentaire bien connu que l'on trouve par exemple dans [6] . Cependant, cela n'est pas tout à fait vrai, même dans ce cas simple, car là on raisonne plutôt sur un temps actif qui est égal au temps réel diminué par la somme des temps morts imposés. Pour l'unité de temps on a donc comme temps actif

$$t_{ac} = 1 - R \cdot \tau \quad , \qquad (13)$$

donc

$$\rho = \frac{R}{t_{ac}} = \frac{R}{1 - R\tau} ,$$

d'où $R = \dfrac{\rho}{1 + \rho\tau}$,

comme auparavant.

En dépit des résultats identiques, les raisonnements à l'aide des pertes ou du temps actif ne devraient pas être confondus. Cette différence se révèlera décisive dans des cas plus compliqués où le simple remplacement du temps réel par un temps actif comme dans (13) n'est plus légitime. En effet, c'est seulement pour un processus de Poisson que la densité d'intervalles entre événements consécutifs ne dépend pas du choix de l'origine du temps.

Références

[1] L.J. Rainwater, C.S. Wu: "Application of probability theory to nuclear particle detection", Nucleonics 1, 60 (1947)

[2] W.C. Elmore: "Statistics of counting", Nucleonics 6, 26 (1950)

[3] J.W. Müller: "On the interval distribution for recurrent events with a non-extended dead time", Report BIPM-105 (1967)

[4] id.: "On the influence of two consecutive dead times", Report BIPM-106 (1968)

[5] A.P. Baerg: "Variation on the paired source method of measuring dead time", Metrologia 1, 131 (1965)

[6] R.D. Evans: "The Atomic Nucleus" (McGraw-Hill, New York, 1955), p. 787

(Avril 1973)