Original
M = Moreau
Jour R de Travaux

Profil spectral de la radiation étalon du krypton et mesures au Perot-Fabry (suite)

par P. Giacomo

---

4. Nouveau problème

A la suite du rapport BIPM-73/2 (1) W.R.C. Rowley nous a signalé la méthode de pointé des franges qu'il utilise au N.P.L., avec un interféromètre de Perot-Fabry, pour les mesures de longueur d'onde. L'effet du défaut de symétrie de la radiation étalon du krypton calculé précédemment ne concerne que les méthodes où le pointé des franges peut se ramener à celui du sommet. Ce n'est pas le cas pour la méthode du N.P.L., dont le principe est le suivant.

Pour un profil enregistré $I_{(T)}$ (flux reçu par le récepteur en fonction de l'épaisseur optique T de l'interféromètre) dont le sommet a une ordonnée I_M, on détermine le "diamètre curviligne" entre les ordonnées $I_1 = 0{,}1\ I_M$ et $I_n = 0{,}9\ I_M$ par exemple (fig. 1). Pour cela, on pointe les abscisses T'_i et T''_i (on prendra $T'_i < T''_i$) correspondant à n ordonnées équidistantes $I_i = I_1 + \frac{i-1}{n-1}\ (I_n - I_1)$, i entier variant de 1 à n ; on en déduit les points du diamètre, de coordonnées I_i et $T_i = \frac{T'_i + T''_i}{2}$.

On prend pour abscisse du "centre" de la frange la moyenne

$$T_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Cette méthode a l'avantage de ne pas utiliser les parties du profil (sommet et pieds) dont les abscisses sont mal définies en présence de bruit. On peut en outre espérer qu'elle donne avec une assez bonne approximation le centre de gravité du profil enregistré. On notera toutefois qu'elle ne tient pas compte des poids $T''_i - T'_i$ qui seraient nécessaires pour déterminer le centre de gravité mais qui donneraient une importance prépondérante aux pieds, mal déterminés.

Le problème que nous cherchons à résoudre est le suivant : comment comparer les mesures utilisant cette méthode avec celles

utilisant un Perot-Fabry mais un pointé du sommet (Barger-Hall) ou avec celles utilisant un Michelson, méthodes déjà comparées entre elles dans le précédent rapport (2). Bien entendu, il n'y a aucun problème pour un profil symétrique ; toute la difficulté provient de la légère dissymétrie du profil spectral de la radiation étalon qui entraîne, en fonction de l'épaisseur T, une variation de la longueur d'onde apparente (3).

Comme précédemment, on utilisera, pour représenter le profil spectral du krypton, un doublet $(r, \Delta\sigma)$; on repérera les épaisseurs optiques par les ordres d'interférence pour la composante forte σ_1 en posant $p = 2T\sigma_1$; on repérera les franges (p_m) par rapport à celles que donnerait la composante σ_1 seule (4).

5. Déplacements des franges du krypton

Le profil enregistré $I(p)$ résulte de la superposition des deux profils $I_o(p)$ et $rI_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right)$ donnés par chacune des deux composantes, avec $p = 2T\sigma_1$ et $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p = 2T\sigma_2$

$$I(p) = I_o(p) + rI_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right)$$

La présence de la composante faible entraîne, par rapport à la composante forte seule, une modification du profil, que l'on supposera toujours petite, et que l'on peut caractériser (fig.2) par

δI à abscisse donnée : $\quad \delta I = rI_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right)$

δp à ordonnée donnée :

$$I(p+\delta p) \approx I(p) + \frac{dI}{dp}(p)\ \delta p = I_o(p) + rI_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right) + \frac{dI}{dp}(p)\ \delta p$$

pour $I(p+\delta p) = I_o(p)$, $\quad \delta p \approx - \dfrac{rI_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right)}{\frac{dI}{dp}(p)}$;

cela suppose $\frac{dI}{dp}(p) \neq 0$, condition déjà requise par la méthode de pointé du N.P.L.

On en déduit les déplacements d'un point du diamètre :

$$\delta p_i = - \frac{r}{2} \left[\frac{I_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p_i'\right)}{\frac{dI}{dp}(p_i')} + \frac{I_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p_i''\right)}{\frac{dI}{dp}(p_i'')} \right]$$

et du "centre" de la frange :

$$\delta p_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \approx - \frac{r}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{I_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p_i'\right)}{\frac{dI}{dp}(p_i')} + \frac{I_o\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p_i''\right)}{\frac{dI}{dp}(p_i'')} \right]$$

La densité des points sur lesquels porte la sommation est uniforme en ordonnée et non en abscisse. On peut écrire

$$dn = k \left| dI \right| = k \left| \frac{dI}{dp} \right| dp$$

où $k = \frac{n}{I_n - I_1} = \frac{n}{\Delta I}$ et $\left| \frac{dI}{dp} \right| = \frac{dI}{dp}$ pour $p = p'_i$ et $- \frac{dI}{dp}$ pour $p = p''_i$.

En remplaçant la sommation par une intégrale (5)

$$\delta p_m \approx - \frac{r}{2\Delta I} \left[\int_{p'_1}^{p'_n} I_o \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p \right) dp - \int_{p''_n}^{p''_1} I_o \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p \right) dp \right]$$

$$\delta p_m \approx \frac{r}{2 I} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left[\int_{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p''_n}^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p''_1} I_o(p) dp - \int_{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p'_1}^{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p'_n} I_o(p) dp \right]$$

On peut, dans cette expression de δp_m, faire plusieurs approximations qui la ramènent à une expression calculable simplement. On ne connaît pas $I_o(p)$ mais on peut lui substituer $I(q)$, où q est l'ordre d'interférence apparent $q \approx p - \delta p_m$, ce qui modifie les limites d'intégration, en première approximation de δp_m ; on peut en outre, dans le domaine étroit qui nous intéresse, prendre $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p_i \approx p_i + \Delta p$ en prenant dans $\Delta p = 2T \Delta \sigma$ la valeur moyenne de T ; les limites d'intégration deviennent donc $q''_n + \Delta p + \delta p_m \approx q''_n + \Delta p$ et les analogues (6). D'où

$$\frac{\delta p_m}{r} \approx \frac{1}{2 \Delta I} \left[\int_{q''_n + \Delta p}^{q''_1 + \Delta p} I(q) dq - \int_{q'_1 + \Delta p}^{q'_n + \Delta p} I(q) dq \right]$$

$\Delta I = I_n - I_1$, q'_1 , q'_n , q''_1 , q''_n correspondent aux limites, en abscisse et en ordonnée, entre lesquelles on a déterminé le diamètre curviligne de $I(q)$; r et Δp caractérisent le doublet, donc l'asymétrie du profil spectral.

On notera que σ_1 n'intervient plus dans l'expression de δp_m : I(q) est rapporté à l'échelle des nombres d'ondes apparents de la radiation globale, σ_{app}, ce qui demande seulement d'étudier I(q) sur un ou quelques ordres au voisinage de la frange considérée. De même le facteur $1/\Delta I$ élimine la constante d'échelle des ordonnées, qui peuvent être mesurées avec une unité arbitaire.

6. Mise en pratique

Après avoir enregistré I(q), tracé le diamètre et déterminé q_m, on dispose de tous les éléments nécessaires au calcul de δp_m correspondant au doublet (r, $\Delta\sigma$).

$\frac{\delta p_m}{r}$ est donné par la demi-différence des surfaces indiquées sur la figure 3, en prenant $\Delta I = I_n - I_1$ comme unité sur l'axe des I.

δp_m donne la distance entre la frange effectivement pointée et la frange que l'on pointerait si la radiation étalon ne comportait que la composante σ_1, de profil spectral symétrique (ce qui n'implique pas que le profil enregistré pour σ_1 seule serait symétrique (3)).

Si $\sigma_2 < \sigma_1$, donc $\Delta\sigma < 0$ et $\Delta p < 0$, on voit que δp_m est > 0 pour les petites valeurs de T, ce qui correspond bien à des franges décalées vers les p croissants, donc vers celles de σ_2 seule (elles-mêmes décalées de $-\Delta p$ par rapport à celles de σ_1 seule).

Il est relativement facile, pour un profil enregistré donné, d'essayer plusieurs valeurs possibles de r et $\Delta\sigma$: le changement de $\Delta\sigma$ ne modifie que le décalage des limites d'intégration $\Delta p = 2T\Delta\sigma$; r n'intervient que comme facteur multiplicatif dans l'expression de δp_m.

Comme précédemment le nombre d'ondes apparent de la radiation étalon est $\sigma_1 - \frac{\delta p_m}{2T}$ et σ_1 s'élimine encore dans la comparaison entre deux mesures puisque

$$(\sigma_{app})_A - (\sigma_{app})_B = \left(\frac{\delta p}{2T}\right)_B - \left(\frac{\delta p}{2T}\right)_A$$

7. Allure des variations de δp_m

a) Lorsque $T \to 0$, $\delta p_m \to 0$

mais en outre puisque $\Delta p \longrightarrow 0$

$$\int_{q_i + \Delta p}^{q_j + \Delta p} I(q)dq \approx \int_{q_i}^{q_j} I(q)dq + \Delta p \left[I(q_j) - I(q_i) \right]$$

d'où $\frac{\delta p_m}{r} \approx \frac{1}{2\Delta I} \Delta p \left[I(q_1'') - I(q_n'') - I(q_n') + I(q_1') \right]$

$\approx - \Delta p$

Si l'on tient compte du δp_m que nous avons négligé dans les limites d'intégration, on a

$$\delta p_m \approx - r (\Delta p + \delta p_m)$$

$$\delta p_m \approx - \frac{r}{1+r} \Delta p$$

Le centre du profil correspond donc au centre de gravité de σ_1 et σ_2.

b) $\delta p_m = 0$ lorsque $\Delta p = \frac{1}{2}$, ce qui était évident a priori puisque $rI_0\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} p\right)$ ne modifie plus que les pieds de $I_0(p)$, et de plus symétriquement par rapport au centre de $I_0(p)$.

c) Maximum (ou minimum) de δp_m en fonction de T. Si on admet que le profil I(q) reste invariable alors que T donc δp varie

$$\frac{d(\delta p_m/r)}{d(\Delta p)} \approx \frac{1}{2\Delta I} \left[I(q_1''+\Delta p) - I(q_n''+\Delta p) - I(q_n'+\Delta p) + I(q_1'+\Delta p) \right]$$

permet de se faire une idée de la variation de $\frac{\delta p_m}{r}$ en fonction de Δp (fig. 4). On retrouve une forme analogue à celle de δp fonction de Δp dans le cas du maximum des franges. En particulier la dérivée est extrémale pour $\Delta p = 0$; elle s'annule et $|\delta p_m|$ passe par un maximum pour Δp de l'ordre de la largeur à mi-hauteur de I(q).

Comme précédemment, on peut, pour chaque épaisseur moyenne T, déduire de I(q) enregistrée l'allure de $\frac{\delta p_m}{r}(\Delta p)$. On a ainsi une famille de courbes $\frac{\delta p_m}{r}(\Delta p)$ sur chacune desquelles le point $\frac{\delta p_m}{r}$ d'abscisse $\Delta p = 2T\Delta\sigma$ donne le déplacement effectif (voir figure 2 du rapport précédent, avec $- q' = - 2T\Delta\sigma$; à finesse égale, les courbes pour δp_m seront au-dessus de celles pour δp).

NOTES

(1) Dans ce rapport, au bas de la page 2, la relation [1] devrait être écrite "[1] $\frac{1}{2}\frac{dI}{dT} = \ldots$" ; deux lignes plus haut on doit lire : "les maximums de I(T) ...".

(2) Lorsqu'on pointe le sommet en utilisant une exploration de T (ou de q') en fonction du temps t, les fonctions telles que I(T) ou J(q') tiennent compte des effets d'élargissement (défauts de planéité, diaphragme de sortie, etc.), mais elles sont définies à un instant donné et on ne doit pas y inclure l'effet d'élargissement dû à l'exploration. Si par exemple $T(t) = T_o + a \cos \omega t$, avec a petit par rapport à λ, $I\left(T(t)\right) = I\left(T_o\right) + \frac{dI}{dT}(T_o)\, a \cos \omega t + \frac{d^2I}{dT^2}(T_o)\ \frac{a^2}{2} \cos^2 \omega t + \ldots$ entraîne $\overline{I\left(T(t)\right)}^t = I(T_o) + \frac{a}{4}\ \frac{d^2I}{dT^2}(T_o) + \ldots \neq I(T_o)$; mais le terme de pulsation ω est bien proportionnel à $\frac{dI}{dT}(T_o)$. On doit donc prendre garde à mesurer I(T) en l'absence de modulation et non $\overline{I(T(t))}^t$.

(3) Le profil enregistré avec un Perot-Fabry peut être dissymétrique pour d'autres raisons : dissymétrie de la distribution des défauts de planéité, excentrage du diaphragme de sortie, par exemple. Il convient d'étudier dans chaque cas (y compris pour le Michelson) l'effet éventuel de ces défauts sur λ_{app} (ou σ_{app}). Nous ne traiterons ici que de la contribution de la dissymétrie du profil spectral aux variations de λ_{app}. On peut toutefois noter que la dissymétrie de la distribution des défauts de planéité n'entraîne pas, à elle seule, de variation de λ_{app} en fonction de T ; d'autre part, lorsqu'on compare avec le même instrument et la même géométrie des faisceaux deux longueurs d'onde voisines, les effets des dissymétries d'origine instrumentale sur les deux longueurs d'onde apparentes se compensent en majeure partie.

(4) La composante σ_1 n'est qu'une commodité de calcul. Elle n'est pas directement accessible à l'expérience et son existence physique réelle reste à prouver. On remarquera d'ailleurs que σ_1 s'élimine lorsqu'on veut <u>comparer</u> les mesures faites avec deux instruments différents.

(5) La substitution de $\int$ à $\sum$ serait parfaitement correcte si les diamètres étaient rectilignes ; elle correspond encore à une très bonne approximation pour les faibles courbures rencontrées.

(6) Si l'on veut rétablir δp_m dans les limites d'intégration, on devra substituer aux courbes approchées $\frac{\delta p_m}{r}(\Delta p)$ des courbes $\frac{\delta p_m}{r}(\Delta p + \delta p_m)$; on passe ici encore des unes aux autres par un cisaillement (tg α = r) négligeable en première approximation.

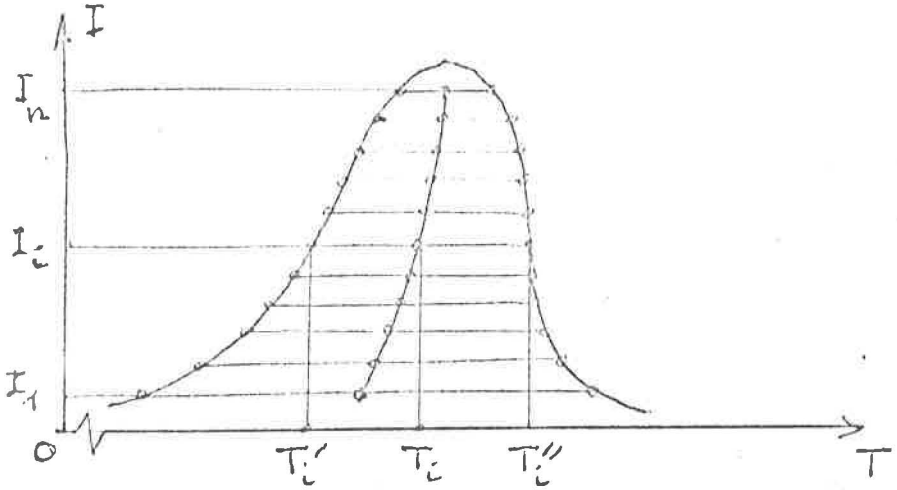

Figure 1 - Le défaut de symétrie est fortement exagéré

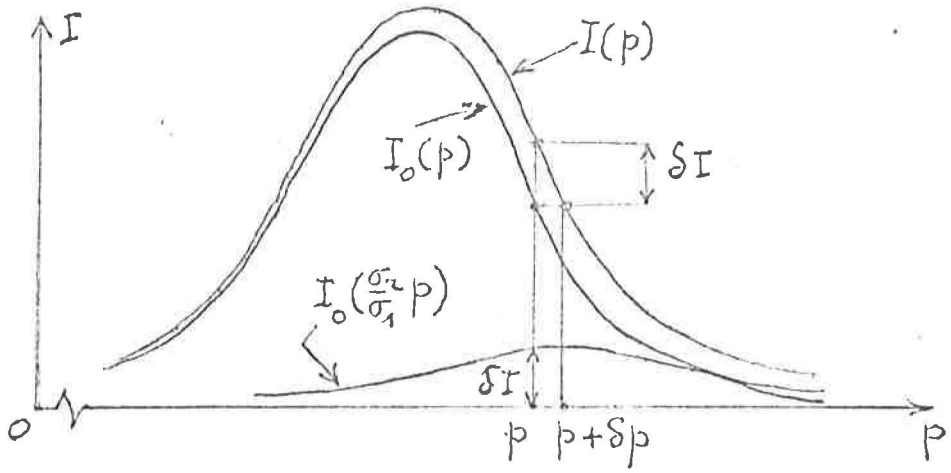

Figure 2 - δI à p donné
δp à I donné

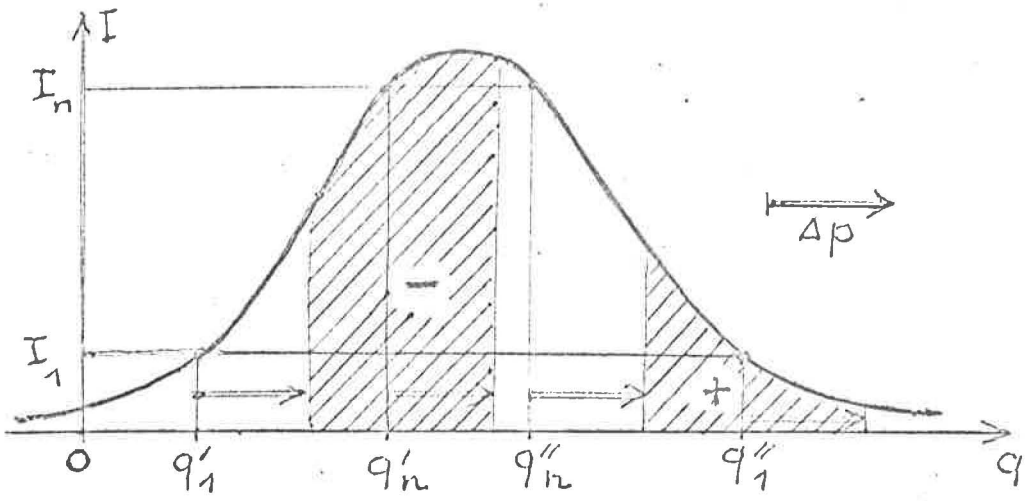

Figure 3

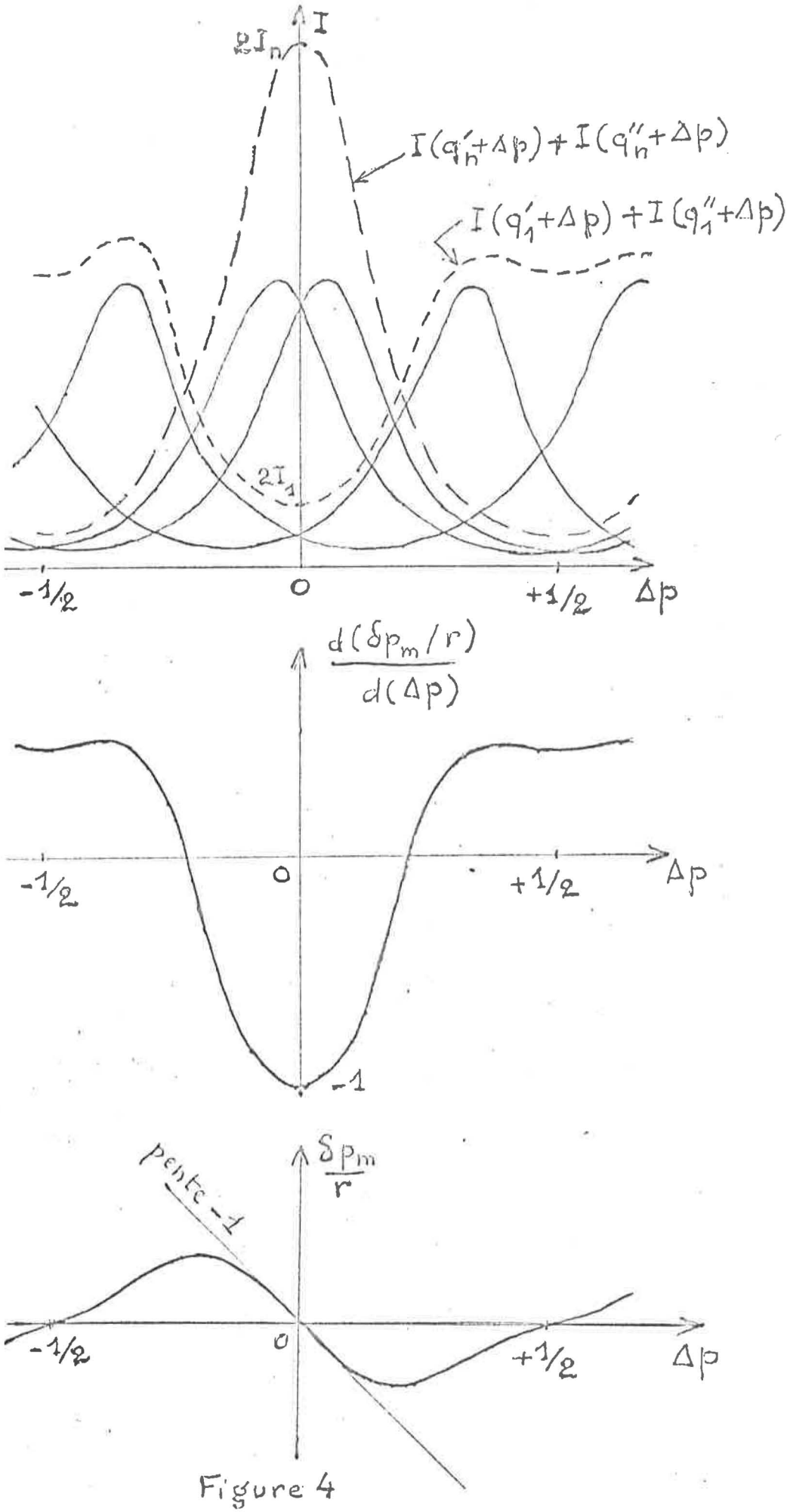
I
2I_n
I(q'_n+Δp)+I(q''_n+Δp)
I(q'_1+Δp)+I(q''_1+Δp)
2I_1
-1/2
0
+1/2
Δp
d(δp_m/r)
d(Δp)
-1/2
0
+1/2
Δp
-1
δp_m
r
pente -1
-1/2
0
+1/2
Δp

Figure 4