Intervalles entre impulsions corrélées

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures

Si la durée de vie de l'état intermédiaire est négligeable pour le détecteur employé, les deux impulsions résultant d'une désintégration nucléaire en cascade arrivent simultanément. Elles peuvent être enregistrées, et donc séparées des autres impulsions, à l'aide d'un circuit à coïncidences. Par contre, dans le cas fréquent où la durée est comparable au temps de résolution ou le dépasse, cette belle méthode ne peut plus être utilisée.

Pour faire face à cette situation, la technique de mesure doit être généralisée. Il faut essayer d'utiliser les rapports dans le temps qui existent entre les différentes radiations, par exemple en mesurant le coefficient de corrélation pour le processus en question en fonction d'un retard variable (voir par exemple Rapport BIPM-71/5).

Mais puisque l'existence de corrélations entre les impulsions observables affecte tout le comportement statistique du processus, cela doit avoir, en général, également des répercussions sur les paramètres qui nous servent habituellement à caractériser sa nature. Pour en tirer parti en vue d'une mesure quantitative de ces perturbations et des causes physiques qui les produisent, il convient de choisir ceux qui s'y prêtent le mieux, tant sur le plan expérimental que sur celui du calcul théorique. La fonction de corrélation, ainsi que les moments ou la covariance déterminés par comptages directs, ne sont pas forcément les meilleurs paramètres pour atteindre ce but, et leur mesure expérimentale est souvent assez compliquée ou longue.

En particulier, il faut s'attendre à une modification d'une des propriétés les plus fondamentales du simple processus de Poisson, c'est-à-dire de la distribution des intervalles de temps entre impulsions successives: la loi exponentielle subira sans doute des changements qui seront fonction de la vie moyenne de l'état intermédiaire.

Comme il est bien connu, c'est cette même distribution des intervalles qui sert de point de départ pour calculer les corrections dues à la présence de temps morts. C'est pourquoi nous avons jugé nécessaire d'essayer de traiter ce problème. Pour spécifier les conditions de mesure, on supposera la situation suivante:

- chaque impulsion "mère" (1) est suivie d'une impulsion "fille" (2), avec des probabilités de détection ε_1 et ε_2 respectives, supposées indépendantes,

- le taux d'émission de mères est constant (ρ),

- l'état intermédiaire se désintègre selon une loi exponentielle avec une vie moyenne de τ ,

- on ne peut distinguer expérimentalement mères et filles, et c'est donc toujours leur superposition qui est mesurée.

De plus, pour faciliter les calculs, on négligera l'influence d'un temps mort et d'un mouvement propre. Remarquons toutefois que cette dernière condition, peu réaliste, peut être écartée, sans modifier pour autant les résultats de façon fondamentale.

Notre problème consiste donc à déterminer la distribution entre les impulsions enregistrées qui se succèdent. Elles peuvent être du type (1) ou (2), et avec ou sans partenaire, selon le hasard. Après un calcul assez long dont les détails feront l'objet d'un rapport ultérieur, la densité pour ces intervalles successifs est donnée par la formule ($t > 0$)

$$f_\tau(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[(\alpha + \beta\, e^{-t/\tau})^2 + \frac{\beta}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \right] \cdot \exp\left[-\alpha\, t - \beta\tau\,(1 - e^{-t/\tau}) \right], \qquad (1)$$

où

$$\alpha = \rho \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\, \varepsilon_2) \quad \text{et}$$

$$\beta = \rho \cdot \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ .$$

Considérons d'abord deux cas limites.

Pour $\underline{\tau \rightarrow \infty}$ on trouve

$$f_\infty(t) = (\alpha + \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)\,t} \ , \qquad (2)$$

donc une simple densité exponentielle qui correspond à un processus pur de Poisson. Puisque les deux radiations ne sont plus corrélées dans ce cas, il a fallu s'attendre à un tel résultat. C'est en effet ce taux expérimental

$$\rho_{exp} = \rho\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \alpha + \beta \qquad (3)$$

que l'on mesure par un simple comptage direct (pour toute valeur de τ).

Pour $\tau \longrightarrow 0$ on obtient

$$f_o(t) = \frac{1}{\alpha + \beta}\left[\alpha^2 \cdot e^{-\alpha t} + \beta \cdot \delta(t)\right] . \tag{4}$$

En raison de la simultanéité des impulsions formant une paire enregistrée, tous les intervalles commençant par une impulsion mère donnent une contribution en forme de fonction delta. Pour les autres cas toute corrélation a disparu et leur distribution est poissonienne.

La forme de la densité $f_\tau(t)$ des intervalles a été contrôlée à l'aide de simulations par la méthode de Monte Carlo, et l'accord entre la répartition empirique et la prévision théorique est toujours excellente. La figure 1 nous en montre un exemple. Le programme pour ordinateur (en Fortran IV) peut être communiqué sur demande.

Or, pour une valeur intermédiaire de τ, la distribution est en général plus compliquée. L'influence apportée par une période finie de l'état intermédiaire ressort plus clairement si nous formons le rapport R des fonctions (1) et (2). On trouve

$$R(t) \equiv f_\tau(t) / f_\infty(t)$$

$$= \frac{(\alpha + \beta \cdot e^{-t/\tau})^2 + \frac{\beta}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \exp\left[\beta t - \beta\tau(1 - e^{-t/\tau})\right] \tag{5}$$

Pour $t = 0$ on a $R(0) = 1 + \dfrac{\beta/\tau}{(\alpha + \beta)^2}$,

et pour $t \gg \tau$ on obtient

$$R(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^2 \cdot \exp(\beta t) \tag{6}$$

La pente asymptotique de f(t), mesurée à l'échelle logarithmique, nous permet donc de déterminer le taux moyen des paires.

Pour déterminer la période de l'état intermédiaire, il suffit (en principe) de mesurer f(t) en un seul endroit fixe. Puisque les taux de comptage α, β et ρ_{exp} sont maintenant connus, on peut choisir n'importe lequel. Ainsi pour $t = 1/\beta$, par exemple, on obtient

$$R(1/\beta) = \frac{(\alpha + \beta\, e^{-\mu})^2 + \mu\beta^2\, e^{-\mu}}{(\alpha + \beta)^2} \cdot \exp\left(1 - \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}\right), \tag{7}$$

avec $\mu = (\beta\tau)^{-1}$.

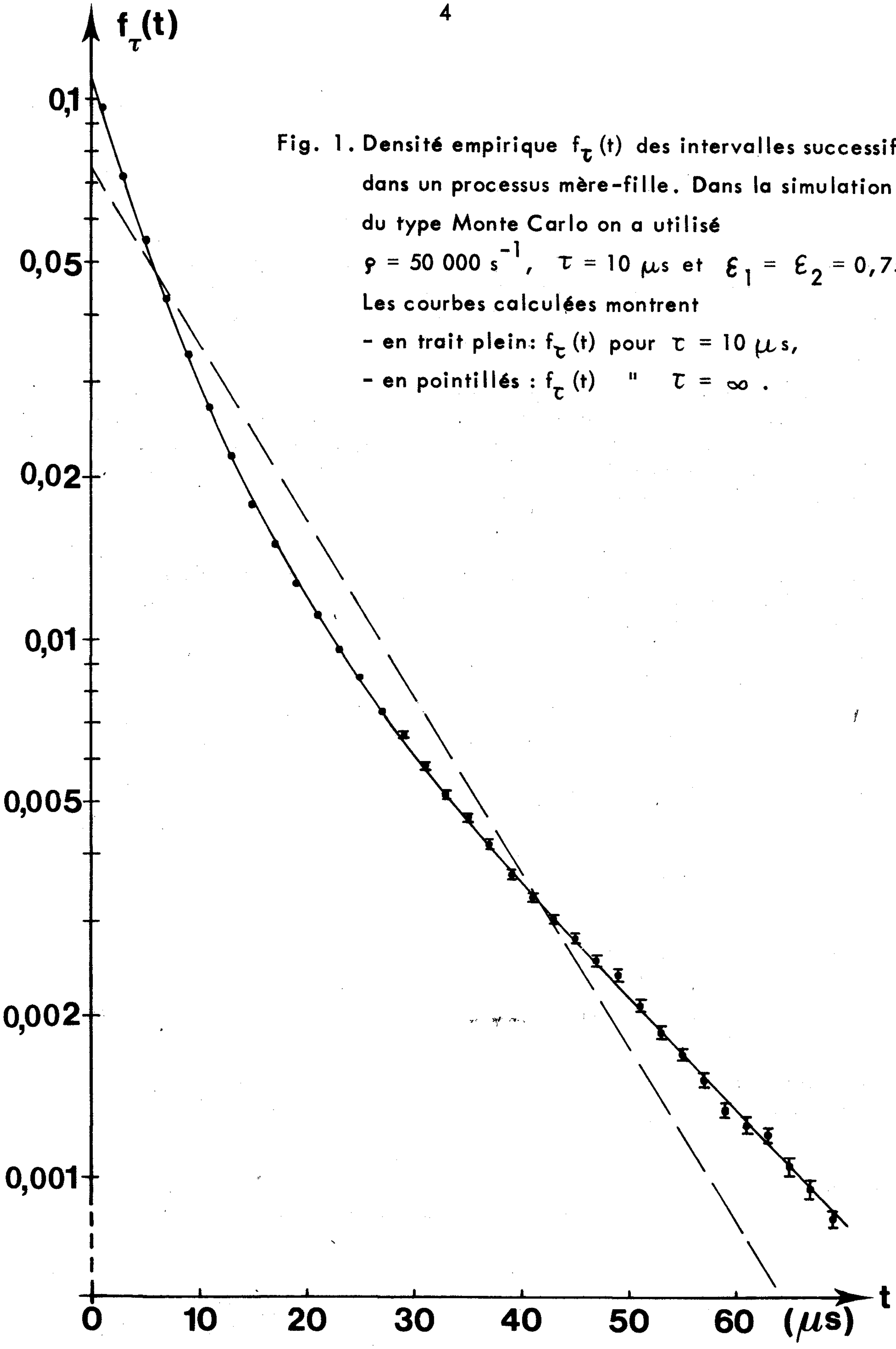

Fig. 1. Densité empirique $f_\tau(t)$ des intervalles successifs dans un processus mère-fille. Dans la simulation du type Monte Carlo on a utilisé
$\rho = 50\,000\ s^{-1}$, $\tau = 10\ \mu s$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}75$.
Les courbes calculées montrent
- en trait plein: $f_\tau(t)$ pour $\tau = 10\ \mu s$,
- en pointillés : $f_\tau(t)$ " $\tau = \infty$.

En utilisant la valeur expérimentale de $R(1/\beta)$, l'équation (7) permet de déduire numériquement μ , et donc aussi la vie moyenne τ .

Quant au taux vrai ρ de la désintégration, il se détermine à partir des valeurs α et β seulement si les efficacités ε_1 et ε_2 sont connues. Mais pour cela il est indispensable de pouvoir distinguer les impulsions mères des filles. Or, cette possibilité a été écartée plus haut.

D'autre part, il s'ensuit que pour la détermination de la vie moyenne, effectuée par la mesure de la distribution des intervalles entre impulsions successives à l'aide d'un convertisseur temps-amplitude, cette distinction est en effet sans importance.

Je suis très reconnaissant au Dr. V.E. Lewis du N.P.L. (Teddington) de m'avoir signalé une erreur qui s'était glissée dans une version préliminaire de ce rapport.

(Mars 1972)