

Statistique de comptage d'événements aléatoires

Jörg W. Müller

Une partie importante de l'effort de cette année concernant la description exacte des problèmes statistiques qui se posent en relation avec l'étalonnage de sources radioactives a été consacrée à l'étude de radiations qui sont corrélées dans le temps. En effet, la désintégration du type mère-fille est une généralisation naturelle du cas classique des coïncidences qui s'impose si la vie moyenne de l'état intermédiaire n'est plus négligeable par rapport au temps de résolution de l'électronique utilisée.

Or, un certain nombre d'autres problèmes ont également retenu notre attention et nous nous permettrons d'en mentionner quelques-uns dans ce qui suit.

a) Distribution d'intervalles entre impulsions corrélées

Supposons que l'on dispose d'une série d'impulsions provenant d'une désintégration du type mère-fille avec vie moyenne  $\tau$  de l'état intermédiaire et que l'on n'arrive pas à distinguer les impulsions d'après leur origine. Les efficacités de détection pour les impulsions mères et filles sont désignées par  $\epsilon_m$  et  $\epsilon_f$ , respectivement. Pour un taux de comptage  $\rho$  de la source on peut montrer que, dans ces conditions, la densité pour l'intervalle de temps  $t$  entre impulsions successives est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[ (\alpha + \beta e^{-t/\tau})^2 + \frac{\beta}{\tau} e^{-t/\tau} \right] \cdot \exp \left\{ -\alpha t - \beta \tau (1 - e^{-t/\tau}) \right\},$$

où  $\alpha = \rho(\epsilon_m + \epsilon_f - \epsilon_m \epsilon_f)$  est le taux total des impulsions non-corrélées et des paires

et  $\beta = \rho \cdot \epsilon_m \epsilon_f$  le taux expérimental des impulsions formant des paires mère-fille (toujours pour  $t \gg \tau$ ).

Pour des cas limites on en déduit

-avec  $\tau = \infty$  :  $f_{\infty}(t) = \rho_{ex} \cdot e^{-\rho_{ex} \cdot t}$ , où  $\rho_{ex} = \alpha + \beta$ ,

-avec  $\tau = 0$  :  $f_0(t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[ \alpha e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \delta(t) \right]$ .

La déviation de la densité  $f(t)$  d'une simple exponentielle, forme caractéristique pour l'absence de corrélations, dépend de la durée de vie  $\tau$  de l'état intermédiaire et celle-ci peut donc en être déduite.

Pour le rapport  $R(t) \equiv f_{\tau}(t)/f_{\infty}(t)$

on trouve par exemple à l'origine  $R(0) = 1 + \frac{\beta/\tau}{(\alpha+\beta)^2}$ ,

tandis que dans la limite  $t \gg \tau$  il est  $R(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \cdot e^{\beta t}$

ce qui permet de déterminer  $\beta$ , le taux des paires.

Remarquons que l'influence d'un mouvement propre (avec taux expérimental  $b$ ) peut être aisément pris en considération si l'on ajoute  $b$  au taux des impulsions non-corrélées, définissant maintenant  $\alpha$  par

$$\alpha = \rho(\epsilon_m + \epsilon_f - \epsilon_m \epsilon_f) + b.$$

Pour plus de détails on consultera le Rapport BIPM-72/3.

#### b) Effet de deux temps morts cumulatifs en série

C'est très récemment seulement que nous avons étudié de plus près le problème des pertes apportées par deux temps morts du type cumulatif (ou non-étendu) à un processus de Poisson, comme il peut être réalisé par une série d'impulsions (avec taux de comptage  $\rho$ ) provenant d'une source radioactive. Ce manque d'intérêt immédiat était dû à notre conviction qu'on devrait s'attendre à un résultat à peu près semblable à celui qui résultait d'une étude similaire pour le cas de deux temps morts non-cumulatifs, effectuée il y a quelques années déjà (Rapport BIPM-106). Or, à notre surprise, le résultat est très différent et mérite notre attention parce qu'il montre un comportement assez curieux et sans doute inattendu.

Désignons les deux temps morts cumulatifs par  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (voir fig. 7) dont le rapport  $\alpha \equiv \tau_1/\tau_2$  est entre zéro et un. A l'aide



Fig. 7. - Dispositif schématique pour les deux temps morts en série.  
 $\rho$  et  $R$  désignent respectivement les taux de comptage initial et final.

de formules déterminées auparavant (Rapport BIPM-112) on obtient pour la densité  $f_1(t)$  des intervalles de temps  $t$  entre impulsions successives après passage du premier temps mort  $\tau_1$  :

$$f_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} U(t - j \tau_1) \cdot A_j(t) ,$$

$$\text{où } A_j(t) = \frac{\rho \left[ -\rho(t - j \tau_1) \right]^{j-1}}{(j-1)!} \cdot e^{-j \rho \tau_1}$$

et  $U$  est la fonction échelon unité.

Le taux de comptage s'évalue à

$$\rho_1 = \rho \cdot \exp(-\rho \tau_1).$$

L'influence du deuxième temps mort  $\tau_2$  consiste à éliminer toutes les impulsions dont la distance par rapport au pré-curseur est inférieure à  $\tau_2$ . Les pertes supplémentaires  $p$ , en valeur relative, s'évaluent donc à

$$p = \int_0^{\tau_2} f_1(t) dt = \sum_{j=1}^J \int_{j\tau_1}^{\tau_2} A_j(t) dt = - \sum_{j=1}^J \frac{1}{j!} \cdot \left[ -x(1 - j\alpha) \right]^j \cdot e^{-jax} ,$$

avec  $x \equiv \rho \tau_2$  ,

où  $J$  est le plus grand nombre entier au-dessous de  $\tau_2/\tau_1$ .

Cela donne pour le taux de comptage  $R$  à la sortie

$$R = \rho_1(1 - p) = \rho \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sum_{j=0}^J \frac{\left[ -x(1 - j\alpha) \right]^j}{j!} \cdot e^{-jax} .$$

Il est intéressant de comparer  $R$  au taux de comptage

$$R_0 = \rho \cdot \exp(-\rho \tau_2)$$

que l'on aurait en l'absence du premier temps mort ( $\alpha = 0$ ), car ceci nous permet de déduire son influence. Si nous posons  $R = R_0 \cdot (1 + D)$ , la grandeur  $D$  donne le changement relatif dû à la présence de  $\tau_1$ :

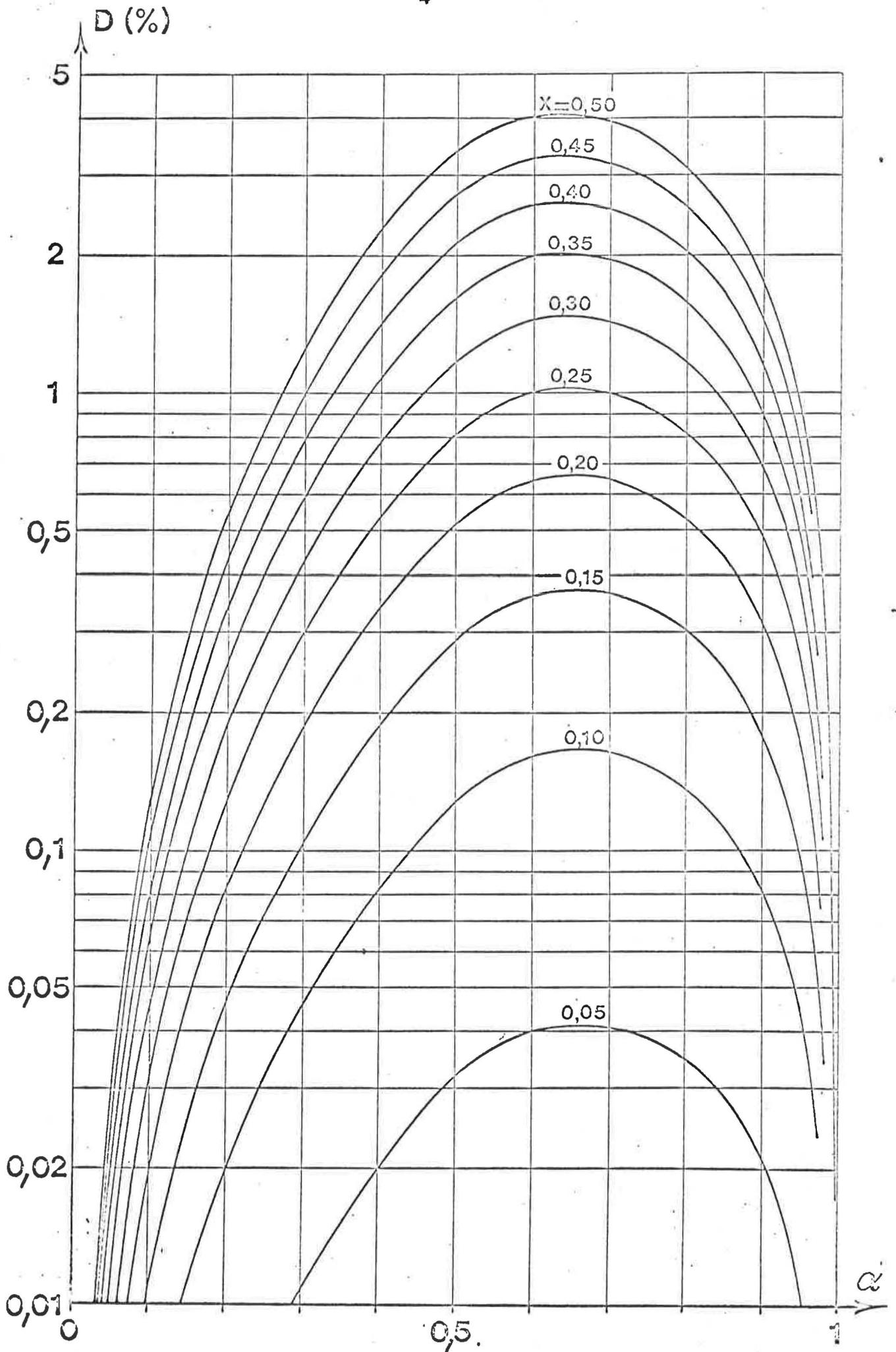


Fig.1.- Influence  $D$  du premier temps mort cumulatif sur le taux de comptage.

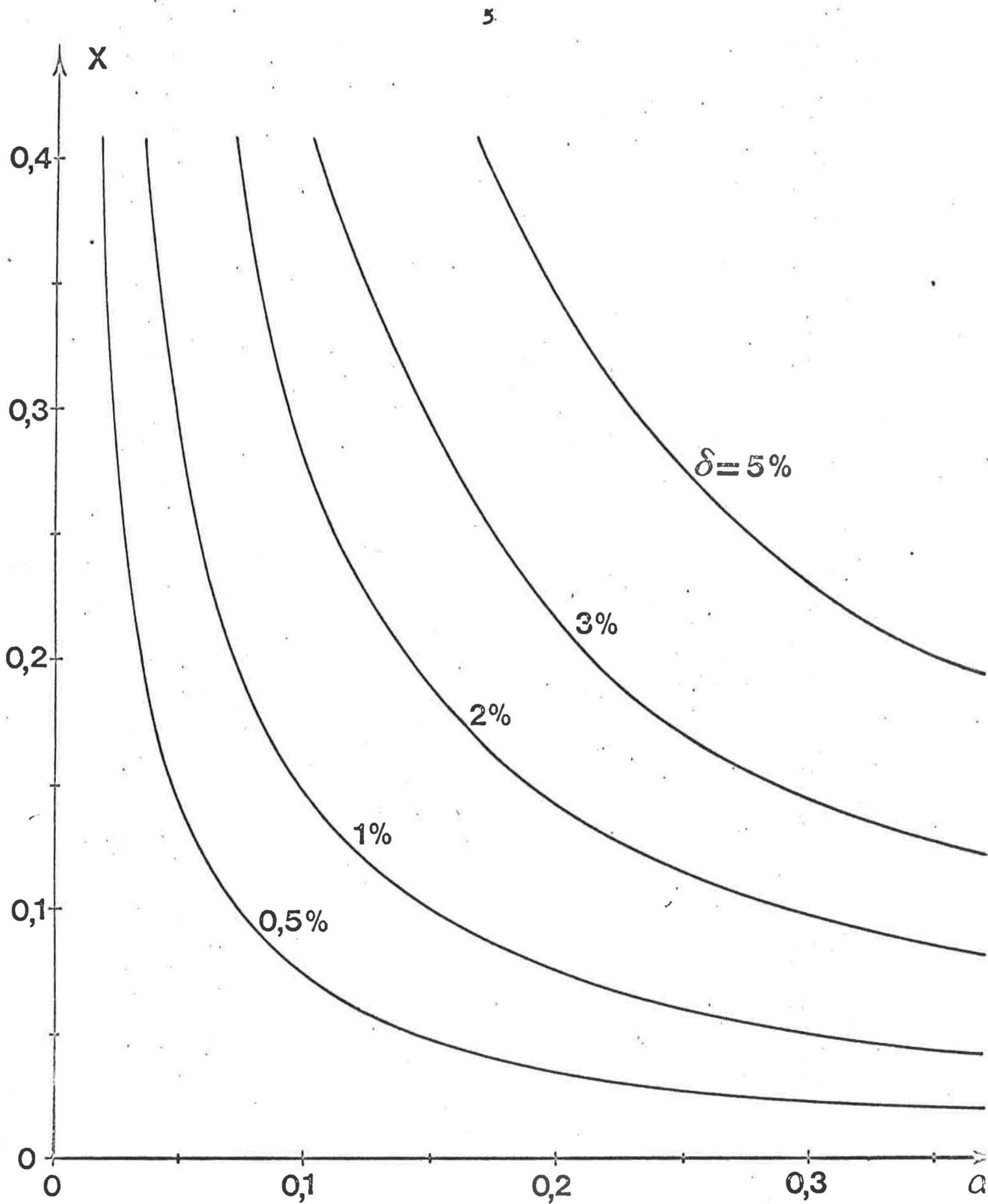


Fig.2 .- Correction  $\delta$  à ajouter à  $D_0$  pour obtenir D.

$$D = e^{x(1-\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^J \frac{[-x(1-j\alpha)]^j}{j!} \cdot e^{-j\alpha x} - 1.$$

On peut montrer que D est toujours positif pour  $0 < \alpha < 1$ , et la figure 1 en donne quelques valeurs pour  $x = \rho\tau_2$  entre 0,05 et 0,5. Mais cela signifie que - contrairement à notre prévision naïve - la présence de  $\tau_1$  ne fait pas diminuer mais plutôt augmenter le taux R à la sortie du dispositif. Cet effet surprenant, mais bien vérifié par quelques mesures préliminaires, s'explique par la déformation apportée par un temps mort cumulatif à la répartition des intervalles : elle est telle que les pertes effectuées maintenant par  $\tau_2$  sont tellement réduites que même l'effet combiné des deux temps morts reste inférieur à celui que  $\tau_2$  seul aurait sur une distribution exponentielle des intervalles.

Pour le cas le plus intéressant où  $\alpha$  est petit, D peut être approché par

$$D_0 = \frac{1}{2} (\alpha x)^2,$$

estimation qui est légèrement par défaut. La figure 2 indique l'écart relatif  $\delta$  par rapport à la valeur exacte, défini par

$$D = D_0 \cdot (1 + \delta).$$

On trouvera plus de détails sur ce problème dans le Rapport BIPM-72/9.

Pour compléter la liste des travaux qui font appel à des méthodes utilisées en statistiques mathématiques, ajoutons brièvement les trois études suivantes :

- Un modèle simple permettant de déterminer de manière quantitative l'influence du comportement statistique des pertes discrètes d'énergie (straggling) qu'une particule subit en pénétrant une cible d'épaisseur finie. On détermine la déformation qui en résulte pour la courbe de résonance nucléaire et en particulier le décalage apparent de sa position exacte, utilisée parfois pour l'étalonnage précis d'accélérateurs du type Van de Graaff (Conférence de Teddington sur les masses atomiques, septembre 1971, voir publications extérieures),
- Un calcul qui a permis de déterminer la forme limite de la densité d'intervalles pour un temps mort  $\tau$  cumulatif, qui se révèle de la forme  $f(t) \sim \exp(-\rho t)$ , pour  $t \gg \tau$ , où  $\rho$  est le taux de comptage original (Rapport BIPM-72/7),
- Une nouvelle méthode, basée sur le principe du maximum de vraisemblance, de déterminer l'énergie maximale d'un spectre de particules alpha où l'on ne dispose que d'un petit nombre de traces dans la plaque photographique (Rapport BIPM-72/6, avec D.J. Gorman).

(Novembre 1972)