Superposition de processus de renouvellement (J.W.M.)

Divers problèmes pratiques dans des domaines très différents nécessitent souvent de connaître la répartition des intervalles dans un processus qui résulte lui-même d'une superposition de divers processus élémentaires. Vu le grand nombre de telles superpositions réalisées dans des domaines techniques et scientifiques, de même qu'un récent besoin particulier (nouvelles méthodes pour la mesure des temps morts), il nous a paru justifié de traiter ce problème d'un point de vue plus général (voir Travaux de la Section des Radiations Ionisantes, janvier 1967). La généralisation consiste essentiellement à prendre en considération les intervalles multiples (d'ordre k), dont l'évaluation donne lieu à quelques difficultés de caractère combinatoire à cause du grand nombre de réalisations possibles et des k-1 événements non observés. Toutefois, une formule générale a été trouvée pour la densité d'un intervalle d'ordre k dans une superposition de n processus de renouvellement. Cette expression est assez compliquée, mais elle se réduit aisément à des formules beaucoup plus maniables dans la plupart des cas qui ont un intérêt pratique.

La situation la plus simple est évidemment celle où l'on ne s'intéresse qu'à la densité d'intervalles entre impulsions successives dans une superposition de deux processus originaux ($i = 1, 2$). Si ceux-ci sont caractérisés par des densités d'intervalles $f_i(t)$ avec des taux de comptage μ_i, c'est-à-dire

$$\mu_i^{-1} = \int_0^{\infty} t\, f_i(t)\, dt,$$

on obtient pour la densité des intervalles dans la superposition :

$$F(t) = \frac{\mu_1\,\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\, U(t) \left\{ f_1(t)\, h_2(t) + 2\, g_1(t)\, g_2(t) + f_2(t)\, h_1(t) \right\},$$

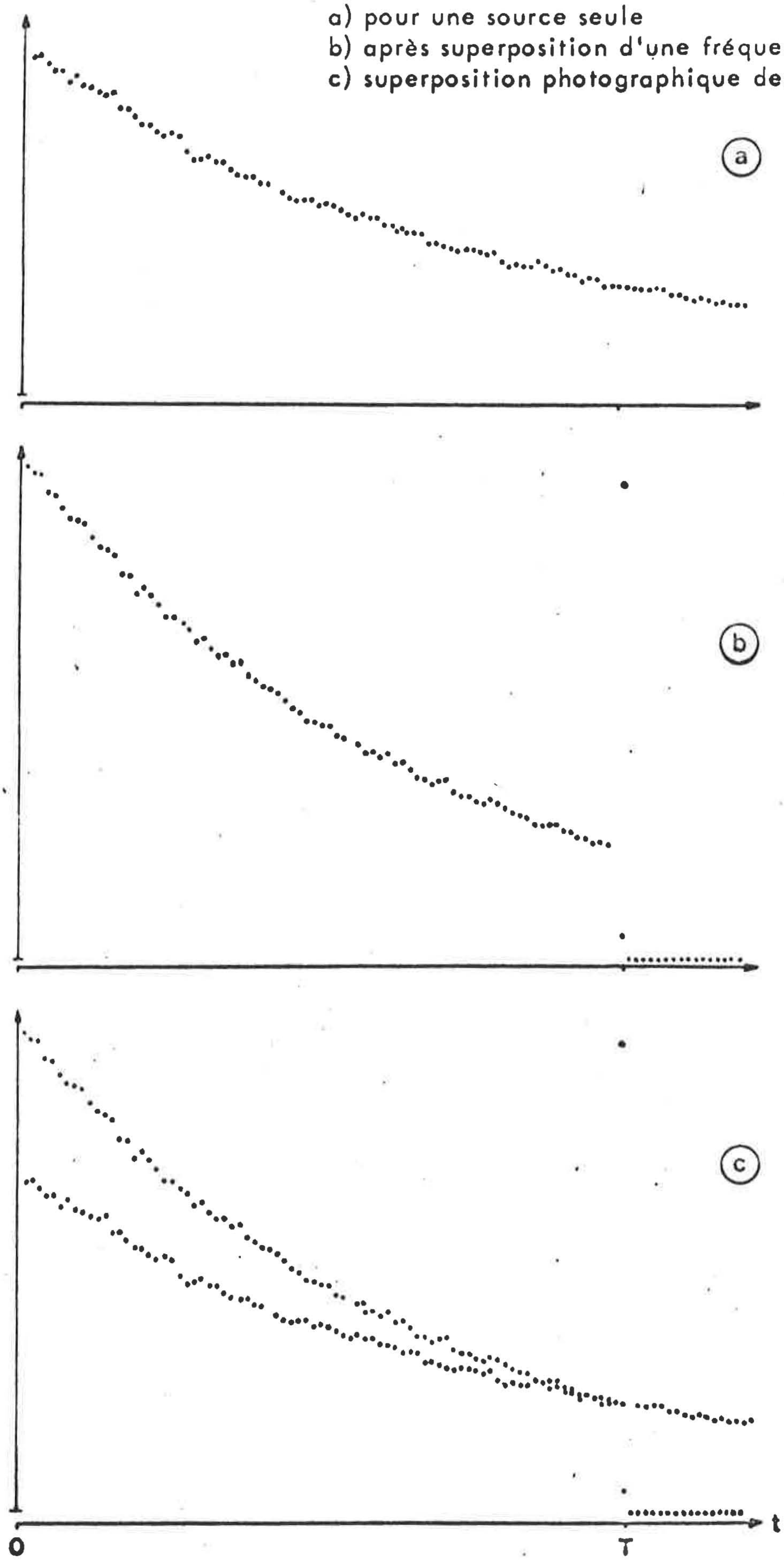
$$\text{où} \quad g_i(t) = \int_t^{\infty} f_i(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad h_i(t) = \int_t^{\infty} g_i(x)\, dx.$$

La fonction échelon unité $U(t)$ élimine les intervalles négatifs.

A titre d'exemple, nous décrivons brièvement une application particulière pour la mesure des radionucléides : on superpose une suite d'impulsions à fréquence fixe $\nu_1 = 1/T$ aux impulsions provenant d'une source radioactive et donnant un taux de comptage $\mu_2 = \rho$. Cette superposition a été proposée récemment pour remplacer l'ancienne méthode des deux sources pour la mesure d'un temps mort (A.P. Baerg : Metrologia, 1, 131, 1965). Les densités y sont donc :

Fig. 15 - Densités d'intervalles

a) pour une source seule
b) après superposition d'une fréquence fixe ($\rho T = 1$)
c) superposition photographique des deux mesures



$$f_1(t) = \delta(t-T) \quad \text{et} \quad f_2(t) = U(t)\,\rho e^{-\rho t} \equiv f(t)$$

où $U(t)$ est la fonction échelon unité et $\delta(t)$ la "fonction" de Dirac. Il en résulte pour la répartition des intervalles, après superposition,

$$F(t) = \frac{\rho}{1+\rho T}\left\{U(t)\,U(T-t)\,\left(2+\rho\left[T-t\right]\right)e^{-\rho t} + \frac{1}{\rho}\,e^{-T}\,\delta(t-T)\right\}.$$

On en déduit que la densité originale $f(t)$ peut être notablement modifiée par les impulsions de l'oscillateur (figure 15). Ainsi le rapport des ordonnées est, pour $t = 0$:

$$\frac{F(0)}{f(0)} = 1 + \frac{1}{1+\rho T}\ , \text{ et pour } t = T : \quad \frac{F(T)}{f(T)} = \frac{2}{1+\rho T}\ .$$

Normalement, la nouvelle répartition $F(t)$ suit toujours, en bonne approximation, une loi exponentielle , mais dont l'exposant est modifié et dépend légèrement de t, car ρ doit être remplacé maintenant par :

$$\rho_T(t) = \rho\left(1 + \frac{1}{2+\rho(T-t)}\right).$$

Nos mesures expérimentales des deux densités $f(t)$ et $F(t)$ confirment bien ces prévisions (figure 15).

Un résumé de la théorie des superpositions, de même que les résultats de quelques applications expérimentales, se trouvent dans un rapport interne (BIPM-107) intitulé "Interval-distributions for superimposed renewal processes".

Juin 1969