Bureau International des Poids et Mesures

Rapport BIPM-86/5

NOTE SUR UNE MÉTHODE D'ITÉRATION

par P. Carré

Dans un récent rapport [1], P. Bréonce et J.W. Müller étudient la résolution par une méthode d'itération de l'équation

$$R = \frac{\theta\rho}{e^{\theta\rho\tau} + \theta - 1},$$

dans laquelle l'inconnue est ρ.

En posant $R\tau = z$ et $\rho\tau = x$, l'équation s'écrit

$$z = \frac{\theta\, x}{e^{\theta x} + \theta - 1},$$

forme qui est utilisée pour la figure 2 de [2] et la figure 11 de [3].

La méthode adoptée consiste à écrire l'équation sous la forme

$$x = g(x) .$$

A partir d'une valeur initiale ξ_o, on calcule $\xi_1 = g(\xi_o)$, $\xi_2 = g(\xi_1)$, ..., $\xi_n = g(\xi_{n-1})$. On constate que, du moins pour une valeur initiale suffisamment bien choisie, ξ_n tend vers la première solution x_1 mais que cette méthode ne convient pas pour fournir la seconde solution x_2.

Raisonnons sur le cas général et désignons par X une racine de l'équation $x = g(x)$.

Soit $\xi_o = X + \delta_o$; on aura $\xi_1 = X + \delta_1$ avec $\delta_1 = \delta_o\, p_o$, p_o étant la valeur moyenne de la dérivée de la fonction $g(x)$ entre les abscisses X et ξ_o, et de même $\delta_2 = \delta_1\, p_1$, ..., $\delta_n = \delta_{n-1}\, p_{n-1}$.

Si les valeurs absolues des p_i sont bornées supérieurement par un nombre q, on aura

$$|\delta_n| < q|\delta_{n-1}| < \ldots < q^{n-2}|\delta_2| < q^{n-1}|\delta_1| < q^n|\delta_o| ,$$

et, si $q < 1$, δ_n tend vers 0 pour n tendant vers l'infini.

Une <u>condition suffisante</u> pour obtenir la racine cherchée est donc que la pente de la courbe représentative de la fonction $g(\xi)$ reste comprise entre des limites intérieures à l'intervalle $]-1,+1[$, pour toutes les valeurs de ξ qui interviennent dans le processus d'itération.

Le problème est donc d'écrire l'équation proposée $z = f(x)$ sous une forme $x = g(x)$ telle que la condition ci-dessus soit satisfaite.

Si l'on remarque que l'équation proposée s'écrit

$$\frac{f(x)}{z} = 1$$

(en excluant la valeur $z = 0$), on voit qu'il est aisé de la mettre sous la forme souhaitée puisqu'il suffit d'écrire

$$x = x\left(\frac{f(x)}{z}\right)^{\alpha},$$

en excluant naturellement la valeur $\alpha = 0$, qui conduit à l'identité $x = x$, et, pour $\alpha < 0$, les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

On a donc

$$g(x) \equiv x\left(\frac{f(x)}{z}\right)^{\alpha},$$

$$\frac{d\,g(x)}{dx} = \left(\frac{f(x)}{z}\right)^{\alpha} + \frac{x}{z^{\alpha}} \cdot \alpha\big(f(x)\big)^{\alpha-1} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}.$$

Au point $x = X$ (racine cherchée), on a $f(X) = z$, d'où

$$\left[\frac{d\,g(x)}{dx}\right]_{x=X} = 1 + \frac{\alpha X}{z} \cdot \left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]_{x=X}.$$

La condition suffisante pour que la méthode d'itération donne la racine X, au moins dans un domaine non vide de valeurs initiales ξ_0, est que la condition écrite soit satisfaite en $x = X$ (en supposant, naturellement, la fonction $f(x)$ continue ainsi que sa dérivée première).

Cette double condition s'écrit

$$-1 < 1 + \frac{\alpha X}{z}\left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]_{x=X} < 1,$$

ou

$$\boxed{-2 < \frac{\alpha X}{z}\left[\frac{d\,f(x)}{dx}\right]_{x=X} < 0}\,.$$

On est donc ramené à une double condition qui fait intervenir la pente de la fonction proposée. Comme elle fait aussi intervenir α, nous allons envisager diverses possibilités pour ce dernier paramètre.

<u>$1^{ère}$ racine</u> de l'équation $z = f(x)$ avec $f(x) \equiv \dfrac{\theta x}{e^{\theta x} + \theta - 1}$ et $x > 0$.

La $1^{ère}$ racine correspond à $\dfrac{d\ f(x)}{dx} > 0$; on a aussi $z > 0$ et $X > 0$; cela exige $\alpha < 0$. La valeur la plus simple est $\alpha = -1$; alors

$$\boxed{g(x) \equiv \frac{xz}{f(x)} = \frac{z}{\theta}\,(e^{\theta x} + \theta - 1)}\,.$$

C'est, aux notations près, la relation (3) utilisée dans [1].

La condition de droite est automatiquement satisfaite dans tout le domaine considéré. Quant à celle de gauche, elle s'écrit $\left[\dfrac{d\ f(x)}{dx}\right]_{x=X} < \dfrac{2z}{X}$.

Il est clair, sans aucun calcul (fig. 1), qu'elle est largement satisfaite dans tout le domaine considéré. En revanche, à droite de M, la condition de droite n'est pas satisfaite. Le point représentatif des ξ_i ne peut pas s'approcher de P'. En fait, il s'en éloigne et tend vers P pour toute valeur initiale ξ_o telle que $0 < \xi_o < x_2$, mais non pour $\xi_o > x_2$.

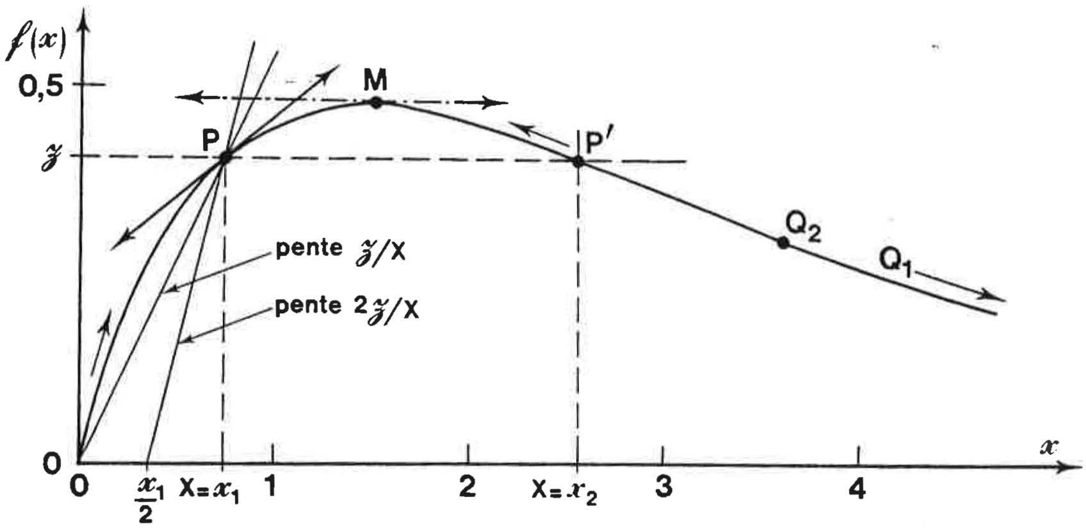

Fig. 1.- Représentation graphique de f(x), pour le cas particulier $\theta = 0{,}5$.
Pour les points Q_1 et Q_2, voir le paragraphe "2^e racine".

2^e racine de la même équation (en excluant toutefois le cas $\theta = 0$).

On a maintenant $\dfrac{d\ f(x)}{dx} < 0$. Cela exige $\alpha > 0$.

Examinons donc la condition de gauche, qui s'écrit

$$\alpha \cdot \frac{d\ f(x)}{dx} + \frac{2z}{x} > 0 \quad \text{(naturellement, en } x = X\text{)},$$

ou

$$\alpha \left[\frac{\theta}{e^{\theta x} + \theta - 1} - \frac{\theta^2\ x \cdot e^{\theta x}}{(e^{\theta x} + \theta - 1)^2}\right] + \frac{2\theta}{e^{\theta x} + \theta - 1} > 0,$$

$$\alpha\ [\theta\ (e^{\theta x} + \theta - 1) - \theta^2 x\ e^{\theta x}] + 2\theta\ (e^{\theta x} + \theta - 1) > 0,$$

$$\theta\ e^{\theta x}\ (\alpha + 2 - \alpha\theta x) + \theta(\theta - 1)\ (\alpha + 2) > 0,$$

et, comme $\theta > 0$,

$$e^{\theta x}\ (\alpha + 2 - \alpha\theta x) + (\theta - 1)\ (\alpha + 2) > 0.$$

Quels que soient α et θ, il existe une valeur x_ℓ de x $\left(x_\ell = (\alpha + 2)/\alpha\theta\right)$ telle que, pour $x > x_\ell$, le premier terme est négatif. La présence du facteur $e^{\theta x}$ permet d'affirmer qu'il existe une valeur x_λ de x ($x_\lambda > x_\ell$) telle que, pour tout $x > x_\lambda$, la condition écrite ne soit pas satisfaite.

Naturellement, cette limite peut dépendre (fortement) de α mais on peut affirmer qu'il n'existe pas de valeur de α telle que la méthode d'itération proposée convienne dans tout le domaine considéré, même si l'on restreint le domaine des valeurs possibles de θ.

Sur la fig. 1, j'ai fait figurer le point Q_2, d'abscisse x_λ pour $\alpha = 2$. Le point Q_1 (abscisse x_λ pour $\alpha = 1$) est en dehors de la figure.

Pour une valeur de z telle que la 2^e racine ait une abscisse inférieure à celle du point limite Q_α correspondant à la valeur de α choisie (fig. 2), le point d'abscisse ξ_i s'éloigne de Q_α, comme il s'éloigne aussi de P (puisqu'en ce point la condition de droite n'est pas satisfaite). Toute valeur initiale correspondant à un point situé entre P et Q_α permettra donc d'atteindre la solution P'.

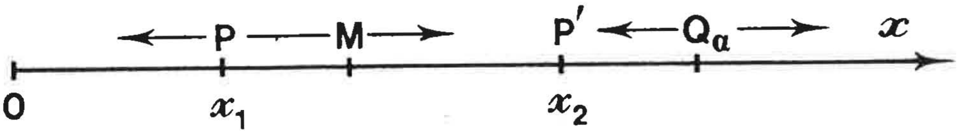

Fig. 2.- Itérations avec $\alpha > 0$.

Sur la fig. 3, je donne l'ensemble des points Q_α correspondant à $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 0,5$ (pour $0 < \theta \leqslant 1$).

Les fonctions g(x) correspondantes

$$g(x) \equiv x \left[\frac{\theta x}{z(e^{\theta x} + \theta - 1)} \right]^\alpha$$

sont encore très faciles à calculer, notamment pour $\alpha = 1$, valeur qui devrait convenir pour la plupart des cas pratiques.

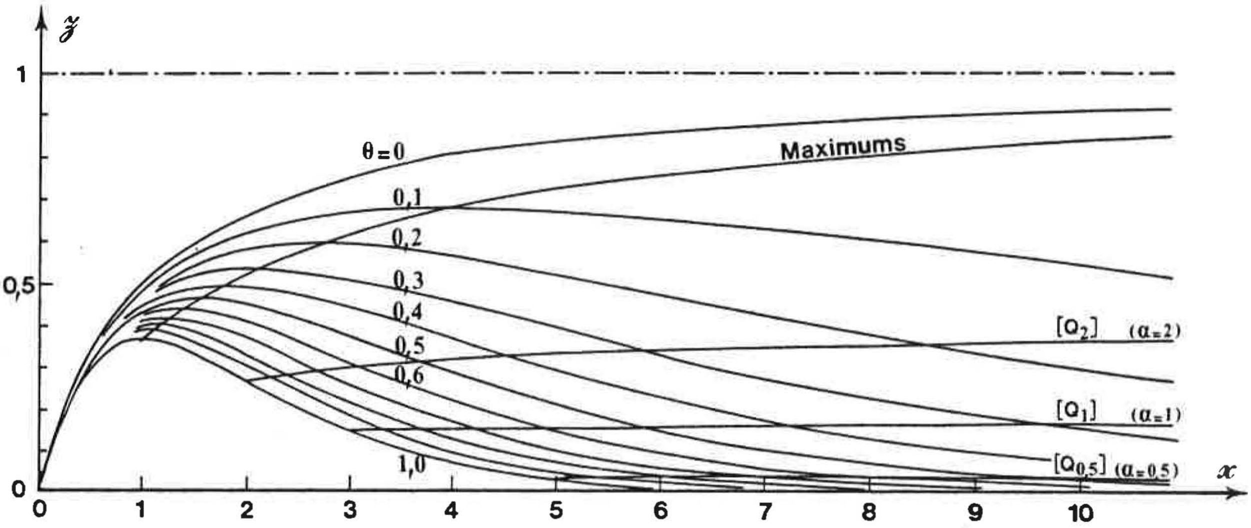

Fig. 3.- Influence de α sur les limites de validité de la méthode d'itération fondée sur l'expression $x = x\left(\frac{f(x)}{z}\right)^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

Enfin, sur la fig. 4, tracée pour $\theta = 0,5$, j'ai adopté pour α la valeur 1. Au lieu de tracer la courbe représentative de la fonction $x \cdot f(x)/z$, courbe qui dépend de z et dont la pente au voisinage de la racine cherchée doit être comprise entre -1 et +1, et de considérer son intersection avec la droite fixe de pente 1 passant par l'origine, j'ai tracé la courbe représentative de la fonction $x \cdot f(x)$, courbe indépendante de z et dont la pente au voisinage de la racine cherchée doit être comprise entre -z et +z ; il faut donc considérer l'intersection de cette courbe avec la droite variable de pente z passant par l'origine. A titre d'exemple, deux valeurs de z ont été choisies ; les droites correspondantes coupent la courbe l'une en P_1 et P'_1, l'autre en P_2 et P'_2. Il est clair que la double condition rappelée ci-dessus est satisfaite pour le point P'_1 et pour le point P'_2 (2^e racine) mais non pour le point P_1 ni pour le point P_2 (1ère racine). Le domaine de validité de la méthode d'itération correspondant à $\alpha = 1$ est constitué de tous les points compris entre M et Q_1. La "marche" de la méthode a été esquissée pour les deux exemples choisis.

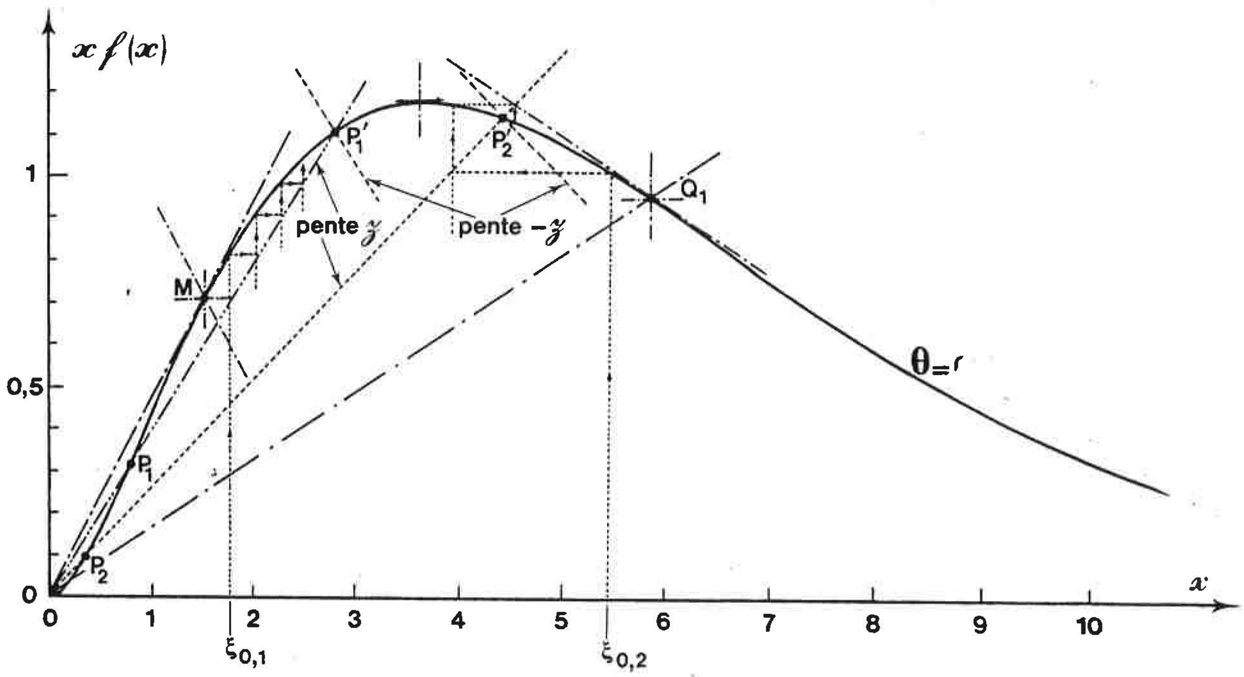

Fig. 4.- Limites de validité et "marche" de la méthode d'itération pour α = 1 et θ = 0,5.

Références

[1] BRÉONCE, P. et MÜLLER, J.W. Détermination numérique du taux originel pour un temps mort généralisé. BIPM WPN-228, novembre 1984, 3 pages.

[2] MÜLLER, J.W. Statistiques de comptage. BIPM Rapport BIPM-84/6, octobre 1984, 5 pages.

[3] BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures, 1984, p. 79.

Février 1985,
revu en avril 1986.