Statistiques de comptage

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Un des développements sans doute les plus prometteurs de ces dernières années, dans notre domaine, concerne le réveil d'une idée qui a somnolé pendant trois décennies, celle d'un temps mort généralisé. Pendant trop longtemps, ce dernier fut pris pour une simple curiosité permettant d'établir un lien théorique entre les deux types traditionnels de temps mort, mais rien de plus; de récentes études ont mieux révélé le potentiel pratique du concept. Sa mise en évidence expérimentale a nécessité la construction d'un appareil électronique susceptible d'imposer à une série d'impulsions ce nouveau type de temps mort.

Dans la première partie, on étudie un aspect particulier, mais critique, de la réalisation faite au BIPM, tandis que la deuxième partie décrit brièvement une application pratique de ce nouveau temps mort généralisé.

Indépendance de choix consécutifs du type de temps mort

Le modèle théorique suppose que l'on associe à toute impulsion soit un temps mort de type étendu (E), avec probabilité $P(E) = \theta$, soit un temps mort de type non étendu (N), avec probabilité $P(N) = 1 - \theta$, les choix étant strictement indépendants les uns des autres. Dans notre réalisation, cependant, le choix n'est pas vraiment aléatoire, mais déterminé par l'état d'un signal périodique binaire (de fréquence $\nu = 1/T$), comme le montre la figure 1. Considérons le cas spécifique où le type N a été précédé du type E. Pour une première impulsion (à l'endroit z_0) dans la zone E, et des impulsions à taux de comptage ρ suivant la loi de Poisson, la probabilité pour la prochaine impulsion de produire un temps mort de type N s'évalue par (avec $r = \rho T$)

$$P(N|E) = \frac{(e^{-r\theta} - e^{-r})\,(e^{r\theta} - 1)}{r\theta\,(1 - e^{-r})} .$$

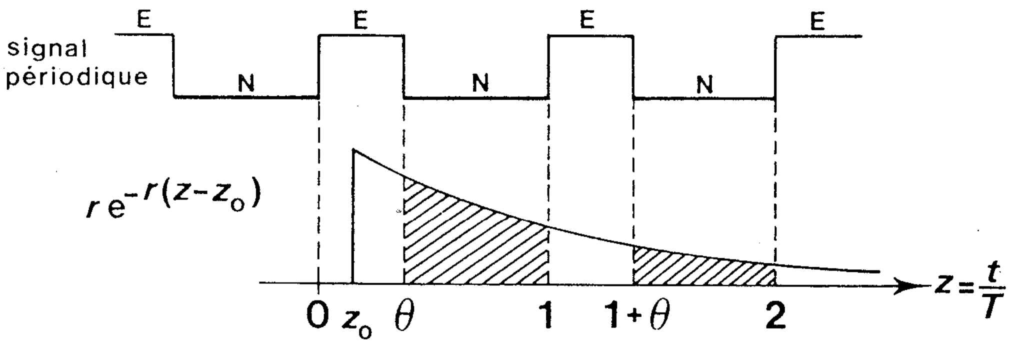


Fig. 1 - Relation temporelle entre les deux états (E et N) d'un signal périodique et l'arrivée de deux impulsions successives, où la première (à z_0) "tombe" dans une zone E et la seconde dans une des zones N (hachurées).

Par un développement en série on peut aussi arriver à la relation

$$P(N|E) = (1 - \theta)\left[1 - \Delta(\theta)\right] ,$$

où $\Delta(\theta) \approx \frac{1}{12}(\rho T)^2\,\theta(1 - \theta)$.

Des expressions analogues pour $P(N|N)$, etc., s'obtiennent aisément en tirant profit de quelques propriétés de symétrie.

La quantité $\Delta(\theta)$, qui atteint son maximum pour $\theta = 1/2$, désigne donc l'écart relatif par rapport au cas idéal $P(N) = 1 - \theta$ que notre réalisation simpliste permet d'obtenir pour la situation où N est précédé par E.

Ainsi, pour $\rho T = 0{,}2$, valeur qui correspond aux applications pratiques, on a donc toujours $\Delta(\theta) < 10^{-3}$, ce qui est suffisamment petit.

Une description plus détaillée est donnée dans le Rapport BIPM-86/7.

Temps morts équivalents

Dans les applications, on a probablement plus souvent affaire à deux temps morts, arrangés en série, qu'à un seul. Si ces arrangements sont bien connus sur le plan théorique, ils restent néanmoins difficiles à traiter. Pour le cas où il serait possible de remplacer un tel arrangement par un seul temps mort, bien que de type généralisé, on pourrait sans doute s'attendre à une simplification notable.

Dans ce but, considérons un dispositif comme celui qui est représenté schématiquement à la figure 2, avec $0 < \alpha < 1$ et un processus de Poisson (à taux ρ) à l'entrée.

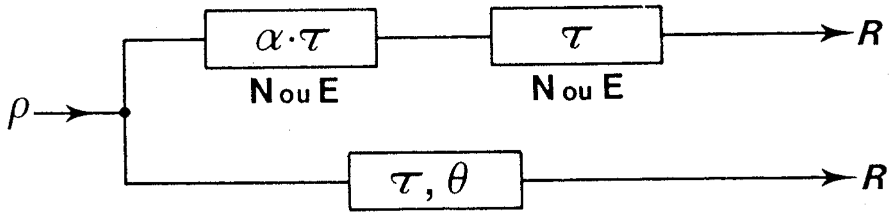


Fig. 2 - Comparaison d'un temps mort généralisé avec un arrangement de deux temps morts (de types conventionnels). Le dispositif (τ,θ) est dit équivalent à l'arrangement en série si les taux de comptage R et R' à la sortie sont identiques.

Il est possible de montrer que, pour tout arrangement $(\alpha\tau, \tau)$ de deux temps morts, il existe une valeur du paramètre θ pour laquelle les taux R et R' à la sortie sont les mêmes.

Pour le moment, une étude exhaustive n'a été faite que pour les deux arrangements "E-N" et "N-E" des types impliqués (Rapport BIPM-86/2). Le paramètre recherché peut être exprimé par une série de puissances de $x = \rho\tau$. Si l'on se contente du troisième ordre en x, le résultat est

- pour un arrangement de types "E-N":

$$\theta = \alpha^2 + \frac{1}{3}\theta^3(1-\alpha)\,x + \frac{1}{36}\alpha^4(1-\alpha)\,(3-5\alpha)\,x^2 + \frac{1}{540}\alpha^5(1-\alpha)\,(9-41\alpha+34\alpha^2)\,x^3 ,$$

- pour un arrangement de types "N-E":

$$\theta = 1 - \alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^2(1-\alpha)^2\,x - \frac{1}{36}\alpha^2(1-\alpha)^3\,(1-5\alpha)\,x^2 + \frac{1}{540}\alpha^2(1-\alpha)^4\,(1+14\alpha-34\alpha^2)\,x^3 .$$

Par des mesures faites avec l'aide de C.E. de Almeida (de l'Instituto de Radioproteção e Dosimetria, Rio de Janeiro), le cas du premier arrangement "E-N" a été étudié soigneusement. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les prévisions. Ils ont montré non seulement que la simple approximation $\theta = \alpha^2$ serait insuffisante, mais aussi qu'une perturbation du processus de Poisson (par un temps mort τ_0), même si elle semble mineure, peut avoir une influence notable sur la mesure de θ. On évite cet effet en utilisant, pour le premier élément de la chaîne, seulement des valeurs $\alpha\tau$ qui dépassent nettement τ_0. Pour une valeur donnée de x, le taux de comptage de la source doit donc rester suffisamment bas. L'ensemble de ces premières mesures d'un temps mort équivalent est décrit dans le Rapport BIPM-86/6.

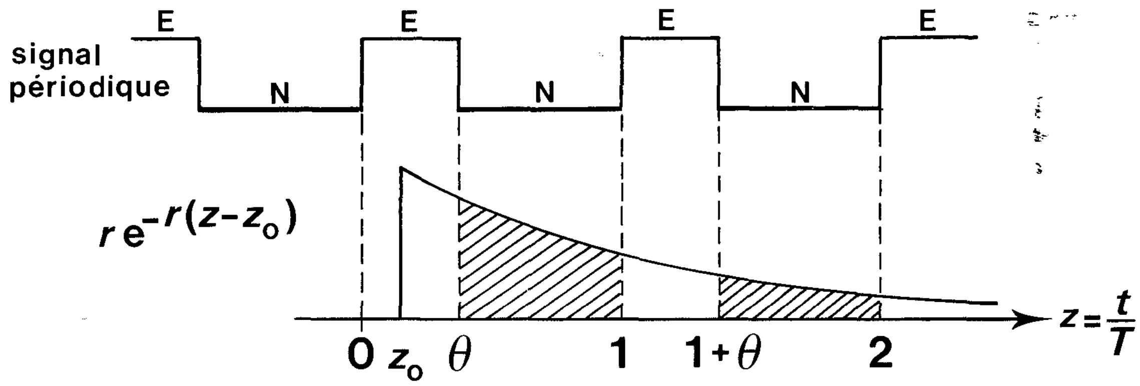
Autres travaux

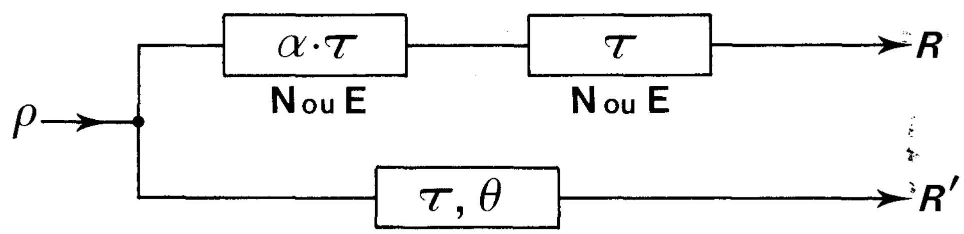
Une nouvelle version de la méthode d'échantillonnage sélectif, appelée "aveugle", a été réalisée qui, tout en offrant les mêmes avantages que l'approche originelle, est beaucoup plus simple à utiliser, car elle ne fait plus appel à un convertisseur de vitesse. On envisage de déposer un brevet pour cet appareil.

Un nouveau regard sur les problèmes concernant l'arrangement de deux temps morts en série a permis de proposer une méthode simplifiée pour déterminer le taux de comptage originel (BIPM WPN-229).

Enfin, il est à noter que l'on est arrivé à une bien meilleure compréhension du problème général qui consiste à attribuer des poids statistiques à des résultats de mesure qui sont corrélés. Une description de cette approche est prévue.

(Octobre 1986)


signal
périodique
E
N
E
N
E
N
E
$r\,e^{-r(z-z_o)}$
0
z_o
θ
1
$1+\theta$
2
$z=\frac{t}{T}$



ρ
$\alpha \cdot \tau$
N ou E
τ
N ou E
R
τ, θ
R'