Rapport BIPM-84/6

Statistiques de comptage

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Un intérêt particulier a été porté à l'étude du comportement d'un temps mort généralisé, qui contient les deux types habituels comme cas limites. Bien que la généralisation se fonde sur une idée déjà ancienne, son adaptation aux mesures pratiques pose parfois des problèmes, et il dépend de leur solution si cette approche plus générale devient aussi plus utile. Deux de ces problèmes sont esquissés dans ce qui suit.

Détermination des nouveaux paramètres

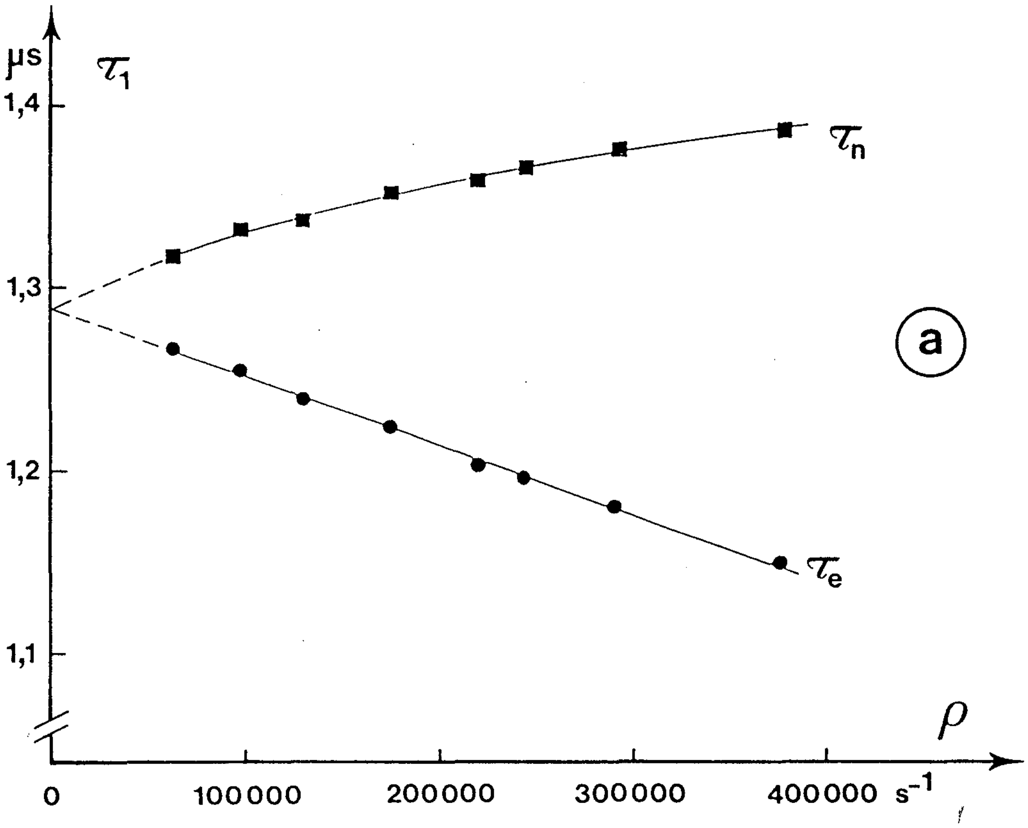
Pour la détermination de l'activité d'une source dont le taux de comptage bêta est très élevé, il est nécessaire de tenir compte de la déformation apportée à la séquence d'impulsions par l'ensemble de la chaîne électronique. Bien que ce problème soit de nature générale, il se manifeste en particulier dans l'application de l'échantillonnage sélectif. Par des méthodes décrites précédemment, il est possible de mesurer ce "premier" temps mort τ_1 que l'on peut considérer comme cause de la perturbation. Or, les résultats expérimentaux montrent que la valeur numérique ainsi obtenue pour τ_1 ne dépend pas seulement du type admis, mais aussi du taux de comptage (fig. 1a). Par conséquent, l'évaluation du taux de comptage originel, et donc aussi de l'activité de la source, est affectée d'une incertitude qui peut être gênante.

On peut en déduire - au moins pour notre appareillage - que le premier temps mort ne correspond à aucun des deux types habituels, mais que son comportement est d'une certaine manière "intermédiaire". Il s'ensuit qu'une description plus fidèle demande l'utilisation d'un temps mort généralisé. Il se trouve qu'un modèle approprié a été proposé, il y a une trentaine d'années déjà [1], mais il ne semble pas avoir donné lieu à une application pratique. La généralisation consiste à supposer que la prolongation d'un temps mort par une nouvelle impulsion se fait seulement avec une certaine probabilité θ qui est indépendante des décisions antérieures.

On peut montrer que dans ce cas, c'est-à-dire pour un processus originel de Poisson avec taux de comptage ρ qui est passé par un temps mort caractérisé par τ_1 et θ, le taux de comptage R à la sortie du dispositif est donné par la formule de Takács

$$R = \frac{\theta\rho}{e^{\theta\rho\tau_1} + \theta - 1} ,$$

qui est représentée sur la figure 2.



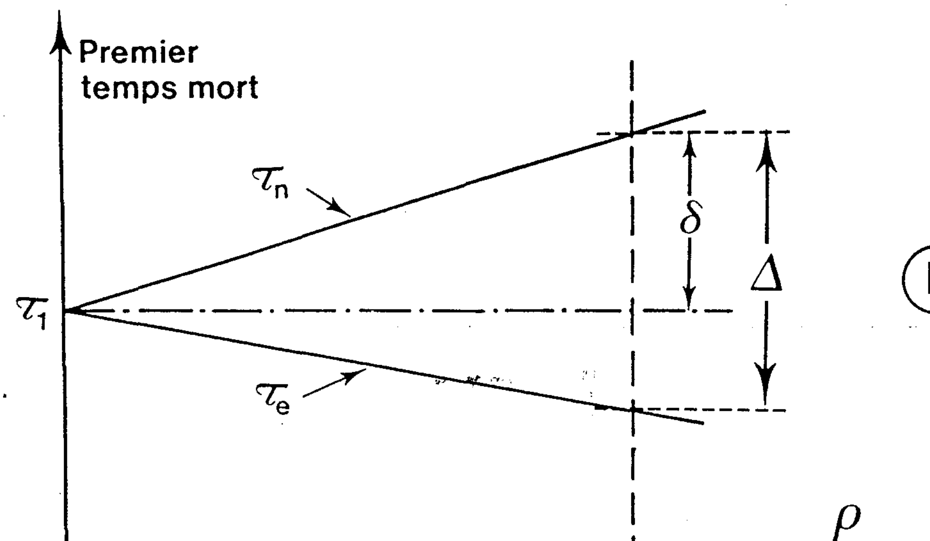


Fig. 1.- a) Comportement de la valeur déduite pour le premier temps mort τ_1 de notre appareillage, supposé de type étendu (e) ou non étendu (n), en fonction du taux de comptage bêta ρ.

b) Comportement schématique des valeurs obtenues pour un temps mort qui est du type généralisé, mais auquel on attribue un des deux types habituels. Le nouveau paramètre s'obtient à l'aide de $\delta/\Delta \approx \theta$.

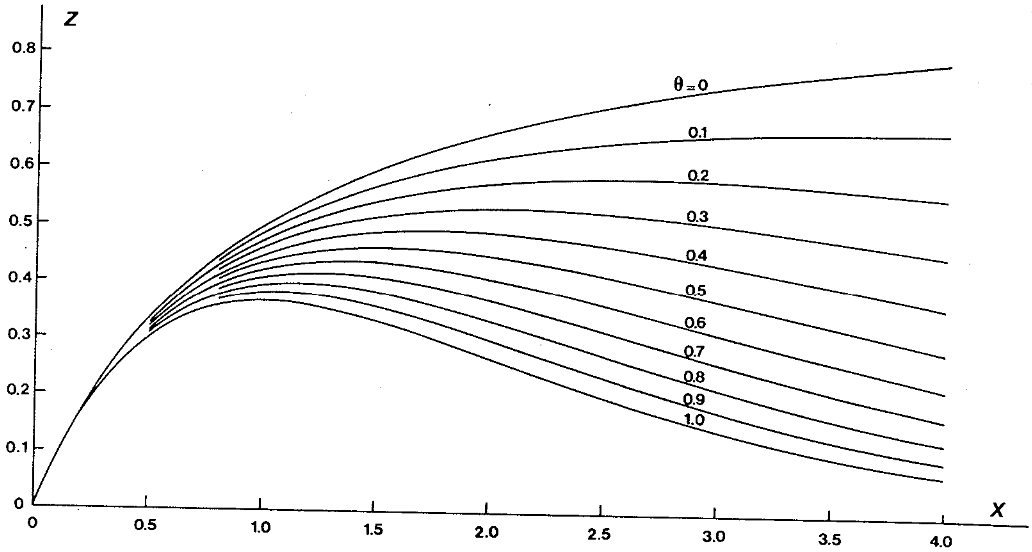


Fig. 2.- Représentation graphique de la relation qui existe entre les taux de comptage à l'entrée et à la sortie d'un temps mort généralisé, avec $x = \rho\tau$ et $z = R\tau$, pour quelques valeurs de θ.

Supposons maintenant que le comportement réel de τ_1 soit en effet décrit par ce modèle. En attribuant arbitrairement à τ_1 un certain type, (n ou e), comme on le faisait auparavant, on identifie R soit avec $R_n = \rho/(1 + \rho\tau_n)$, soit avec $R_e = \rho \exp(-\rho\tau_e)$, et il en résulte qu'en apparence les valeurs de τ_n et τ_e dépendent du taux de comptage. Par un simple développement en série, on trouve en effet qu'alors

$$\tau_n \approx \tau_1[1 + \frac{\theta}{2}\rho\tau_1] \quad \text{et}$$

$$\tau_e \approx \tau_1[1 - (\frac{1-\theta}{2})\rho\tau_1] \; .$$

Ces deux expressions correspondent aux lignes droites de la figure 1b qui se coupent à τ_1 pour $\rho = 0$. Le comportement observé sur la figure 1a s'explique donc de façon naturelle. Cela montre clairement l'utilité du concept d'un temps mort généralisé, tout en permettant d'en déduire les paramètres τ_1 et θ qui le caractérisent. Une description plus détaillée de cette méthode se trouve dans la note BIPM WPN-227.

Evaluation du taux de comptage originel

Dans la grande majorité des applications pratiques, la seule grandeur directement accessible à la mesure est R, taux de comptage après le temps mort, tandis que la grandeur recherchée est normalement le taux initial ρ. Or, les formules disponibles ne donnent souvent que R en fonction de ρ (pour un temps mort supposé connu), comme c'est par exemple le cas pour un temps mort du type étendu (e) où l'on a $R_e = \rho \exp(-\rho\tau_e)$, tandis que leur forme réciproque, qui exprime ρ en fonction de R_e, est laissée à l'expérimentateur, qui s'en tire comme il le peut (par itérations numériques, en général). Le même problème se pose évidemment dans le cas d'un temps mort généralisé, où il s'agit de trouver la réciproque de la formule de Takács.

En dépit d'une chance de réussite jugée bien faible au départ, on a attaqué ce problème. Puisque les expressions pour les inverses de séries formelles, qui y jouent un grand rôle, n'étaient apparemment connues que jusqu'au quatrième ordre, il fallait d'abord disposer de formules fiables permettant d'aller suffisamment loin dans les développements pour pouvoir reconnaître, dans les résultats d'ordre successif, une éventuelle régularité sous-jacente.

Comme préparation à ce travail, on a donc déduit des formules explicites pour l'inversion d'une série, valables jusqu'au huitième ordre. Ce travail, qui a également permis l'établissement d'une expression générale, est décrit dans le Rapport BIPM-84/1.

L'application de ces formules, ainsi que d'autres (déjà connues) servant à trouver une fonction réciproque, a permis d'"inverser" la formule de Takács. En posant $\rho\tau = x$ et $R\tau = z$, elle peut maintenant s'écrire sous la forme

$$x = z\left[1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k z^k\right] ,$$

$$\text{avec} \quad \alpha_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{S(k,k-j)}{(j+1)!} \theta^j ,$$

où S(n,k) sont les nombres de Stirling de seconde espèce.

De façon analogue, il a été possible de trouver une forme un peu différente, mais équivalente, qui est

$$x = \frac{z}{1 - z - \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k z^k} ,$$

$$\text{avec} \quad \beta_k = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{S(k,k-j)}{(j-1)!} \theta^j .$$

Il est possible (bien que pas toujours aisé) de montrer que ces nouvelles formules sont en effet compatibles avec les expressions attendues pour les deux types habituels, c'est-à-dire que

- pour $\theta = 0$, donc τ non étendu : $\alpha_k = 1$, $\beta_k = 0$;

- pour $\theta = 1$, donc τ étendu : $\alpha_k = \dfrac{(k+1)^{k-1}}{k!}$, $\beta_k = \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k!}$.

Ainsi, ces résultats semblent donner une solution générale pour la forme réciproque de la formule de Takács. Néanmoins, il reste un domaine inexploré, car pour tout $\theta > 0$ et une valeur donnée de z, il y a en réalité deux solutions x, comme le montre la figure 2. Or, pour la deuxième solution, qui correspond à des pertes de comptage plus importantes - et qui, pour cette raison, est peu utilisée -, nous ne disposons toujours pas d'une autre approche que par "tâtonnements" numériques répétés. Pour plus de détails, on consultera le Rapport BIPM-84/3.

Autres travaux

Dans la simulation par la méthode de Monte-Carlo de l'enregistrement des impulsions gamma par échantillonnage sélectif, on rencontre un petit obstacle pour le mouvement propre, auquel il faut attribuer des efficacités qui diffèrent de celles qui sont valables pour les émissions de la source mesurée. Ce problème a trouvé une solution qui est décrite dans la note BIPM WPN-226.

Le lien qui existe entre la définition habituelle d'une variance et celle, dite d'Allan, utilisée le plus souvent dans l'étude d'étalons de fréquence, a été clarifié dans un rapport qui est en préparation.

Référence

[1] G.E. Albert, L. Nelson: "Contributions to the statistical theory of counter data", Ann. Math. Stat. 24 (1953), 9-22.

(Octobre 1984)