BIPM/69-16

P. Carré

ANNEXE I

Complément à
Travaux du mois de novembre 1969

Précision Etendue Améliorée

Complément aux rapports BIPM/68-1 (janvier 1968)
BIPM/68-2 (février 1968)
BIPM/69-1 (janvier 1969)

Sous-programme sinus-cosinus, version 1969

Dans la version 1968 on se ramenait au domaine $-\frac{\pi}{6}$, $+\frac{\pi}{6}$. L'organigramme était compliqué, d'où une petite perte de temps et un certain encombrement ; le calcul était rapide puisqu'il utilisait un développement de $\frac{\sin x}{x}$ et de $\cos x$ avec seulement 5 termes. Il y avait d'autre part une très légère perte de précision pour le domaine $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ et les domaines correspondants des autres quadrants.

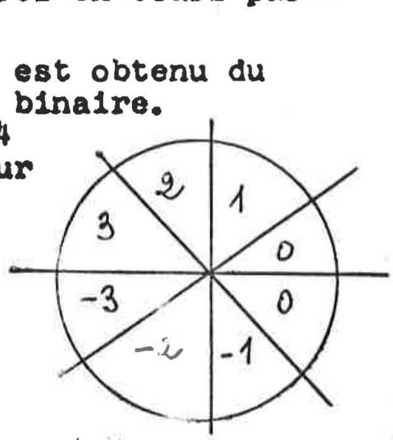
Une entrée tangente était prévue.

Dans la version 1969, j'utilise un développement valable de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$ ce qui permet de simplifier l'organigramme mais allonge un peu le calcul puisqu'il faut maintenant 6 termes. L'entrée tangente, presque jamais utilisée, est supprimée.

Voici le principe.

L'angle x, exprimé en radians est converti en tours par l'opération $z = x/2\pi$.

L'angle z' exprimé en huitièmes de tour est obtenu du même coup puisqu'il a la même représentation binaire. Sa partie entière est cadrée entre -4 et $+4$ par des opérations binaires simples. La valeur -4 peut être atteinte exceptionnellement. Elle est traitée spécialement. On passe des domaines $i = 2, 3, -3, -2$ aux domaines $1, 0, 0, -1$ par le changement de variable $3\frac{1}{|i|} - z'$. Cela correspond à un changement de signe pour le cosinus mais non pour le sinus.



On passe des domaines $i = 1$ ou -1 au domaine 0 par le changement de variable $\frac{1}{|i|} - z'$. Cela correspond à une

.../

permutation de sinus et cosinus et une multiplication par $\frac{1}{|i|}$.

On lance alors le calcul. Les développements utilisés sont des développements en polynômes de Tchébichef que l'on écrit :

$$\cos x = ((((a_{10}z^2+a_8)z^2+a_6)z^2+a_4)z^2+a_2)z^2+a_0$$

$$\frac{\sin x}{x} = ((((a_{11}z^2+a_9)z^2+a_7)z^2+a_5)z^2+a_3)z^2+a_1$$

Les sous-programmes de précision 10^{-18} m'ont permis de calculer ces coefficients, qui apparaissent comme des sommes d'intégrales calculables. Voici leurs valeurs approximatives en numération décimale.

$a_0 =$ 1,000 000 000 000	$a_1 =$ 6,283 185 307 184
$a_2 =$ - 19,739 208 801 941	$a_3 =$ - 41,341 702 240 170
$a_4 =$ 64,939 393 832 581	$a_5 =$ 81,605 249 152 286
$a_6 =$ - 85,456 765 173 469	$a_7 =$ - 76,705 829 970 771
$a_8 =$ 60,238 201 227 505	$a_9 =$ 42,055 286 971 852
$a_{10} =$ - 26,058 582 414 058	$a_{11} =$ - 14,910 094 204 330

Tout cela est fait en virgule fixe, à partir du calcul de z. Une difficulté de cadrage se présente pour les angles $\pm \frac{\pi}{4} = \pm 1$ huitième de tour qui appartiennent aux domaines 1 ou - 1 mais y restent lorsqu'on prend le complément. Ces cas sont aisément reconnus et traités à part.

Il reste à effectuer un changement de signe éventuel, passer à la représentation virgule flottante, et dans le cas du sinus, multiplier par $z/8$.

Nombre de mots mémoire nécessaires 374 (au lieu de 476).

Durée 9,5 ms (au lieu de 10).

2 décembre 1969.