Statistiques de comptage

par J.W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Vu l'intérêt suscité par la récente publication[(1)] du principe de l'échantillonnage sélectif, nous nous limiterons pour l'essentiel à la description de deux développements nouveaux qui s'y rapportent.

Conditions optimales pour l'application de la méthode

Une question importante du point de vue pratique est de savoir si la méthode d'échantillonnage sélectif, une fois le bien-fondé du principe établi, est d'une utilité réelle ou si elle n'est qu'une curiosité présentant un intérêt passager. Cela dépend en grande partie de l'"efficacité" du système ou, plus concrètement, de la durée des mesures nécessaire pour déterminer l'activité, suivant cette méthode, avec une précision suffisante. Il s'agit donc d'évaluer de manière quantitative l'incertitude statistique des mesures expérimentales.

Il est facile de se rendre compte que pour une source très faible la durée des mesures peut devenir excessivement longue, car la fréquence moyenne des cycles d'enregistrement, ainsi que le nombre d'impulsions classées par cycle, tendent vers zéro en même temps que l'activité de la source. S'il s'agit au contraire d'activités croissant de plus en plus, la fréquence moyenne des cycles tend également vers zéro (effet du temps mort cumulatif). Bien que dans ce cas le nombre d'impulsions gamma enregistrées par cycle augmente, cela ne peut pas compenser les pertes. Il s'ensuit que l'efficacité de cette méthode de mesure est optimale pour une activité intermédiaire qu'il convient d'évaluer.

Puisque l'activité recherchée s'exprime par $N_o = N_\beta/\varepsilon_\beta$, où N_β est le taux de comptage expérimental bêta (corrigé), il faut connaître l'efficacité ε_β du compteur proportionnel, que l'échantillonnage sélectif permet d'obtenir à l'aide de la formule $\varepsilon_\beta = 1 - g/G$, g et G étant les nombres d'impulsions enregistrées par canal pendant le temps mort T et après (voir fig. 1). Puisque $g \ll G$, l'incertitude statistique sur ε_β est

---

(1) MÜLLER, J.W. Selective sampling - an alternative to coincidence counting. Nucl. Instr. and Meth., 189, 1981, pp. 449-452.

essentiellement donnée par celle de g, et un raisonnement simple permet d'exprimer l'incertitude relative de N_o avec une bonne approximation par la relation

$$r_{N_o} = \left(\frac{1 - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\beta}\right) N_g^{-1/2} ,$$

où N_g désigne le nombre total d'impulsions gamma observées dans la région de la lacune de la distribution temporelle. Il est possible de déterminer la fréquence moyenne des cycles en décrivant la situation expérimentale comme un arrangement de deux temps morts en série, où le premier, de type cumulatif, est le temps mort T inséré dans la voie bêta, tandis que le second (non cumulatif) est déterminé par la durée L de l'enregistrement sur le sélecteur multicanal. On arrive ainsi (le Rapport BIPM-83/3 indique les détails) à une expression qui donne N_g en fonction de la durée de mesure t et des autres paramètres expérimentaux ε_β, ε_γ, N_β, T et L, supposés connus. En pratique, on s'intéresse le plus souvent à la durée t qui est nécessaire pour atteindre une certaine précision pour la mesure de l'activité d'une source. Cette durée est donnée par

$$t = \frac{N_g \, \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\gamma(1 - \varepsilon_\beta)} \cdot \frac{N_\beta(L - T) + e^{N_\beta T}}{N_\beta^2 \, T} .$$

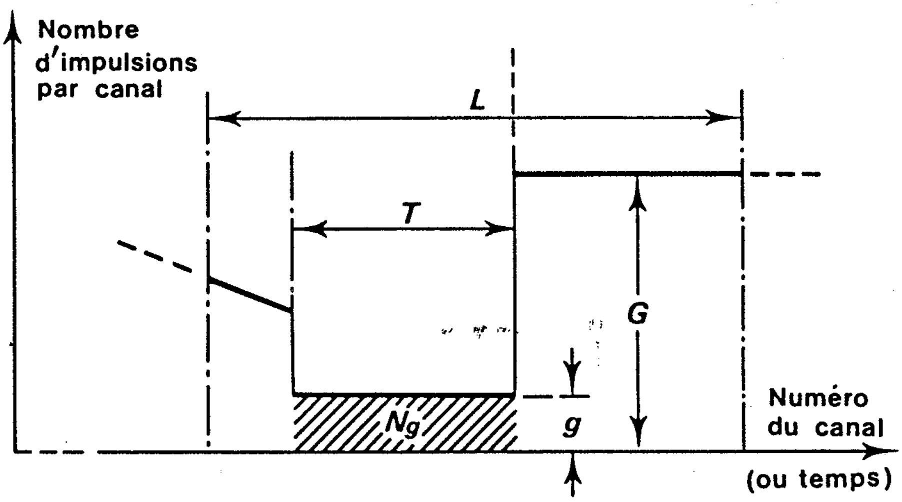

Fig. 1.- Forme schématique du spectre temporel des impulsions gamma. La grandeur N_g, essentielle pour déterminer la précision d'une mesure d'activité, correspond à l'aire hachurée ; la signification des divers symboles est donnée dans le texte.

Illustrons la situation par un exemple numérique. En demandant comme précision $r_{N_o} = 10^{-3}$, la première formule donne $N_g \approx 12\ 350$, pour $\varepsilon_\beta = 0{,}9$. Avec les valeurs réalistes de $\varepsilon_\gamma = 0{,}05$, T = 20 µs et L = 50 µs, la deuxième formule nous indique que, pour un taux de comptage bêta de 100 000 s^{-1}, cette précision peut être atteinte en deux minutes à peine; notons qu'une précision de 0,5 % serait obtenue en moins de cinq secondes. Ce résultat nous confirme que la méthode d'échantillonnage sélectif est particulièrement adaptée à la mesure d'activités élevées.

La variation de $N'_g = N_g/t$ en fonction du taux de comptage bêta N_β est indiquée sur la figure 2 pour quelques valeurs du temps mort T. Pour une précision donnée, la durée de mesure t est donc proportionnelle à $1/N'_g$. On remarque que N'_g passe par un maximum assez plat qui se situe un peu au-delà de la valeur de N_β qui correspond à la condition $N_\beta\ T = 2$. Cette règle approximative peut être utile pour choisir T. Les résultats des calculs ont été bien vérifiés par des mesures (voir aussi BIPM WPN-225).

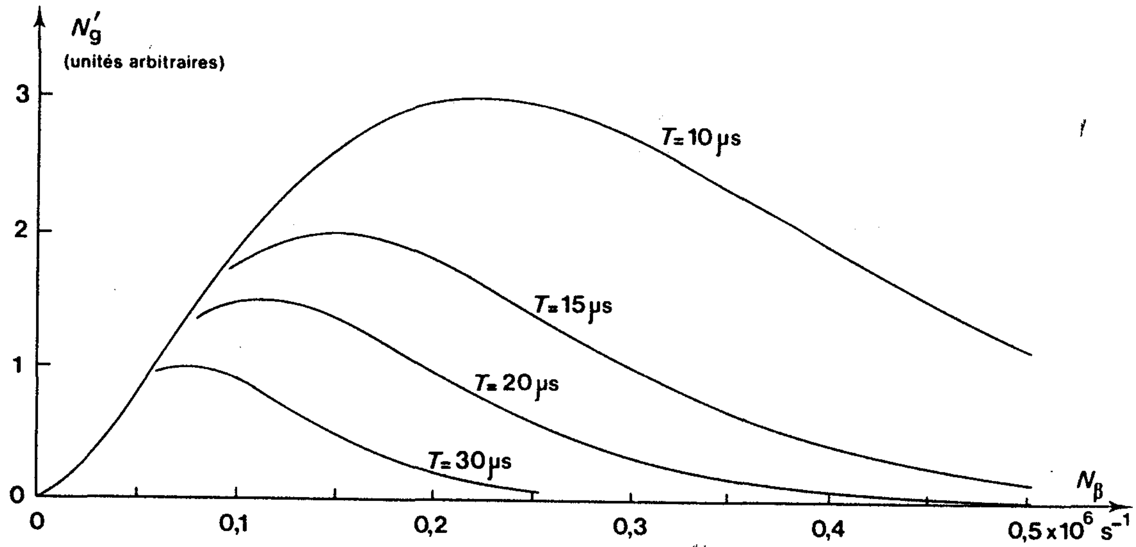

Fig. 2.- Représentation graphique de la grandeur $N'_g = N_g/t$ en fonction du taux de comptage bêta, pour quelques valeurs du temps mort cumulatif T. On suppose ici que L = 2T (voir texte).

Mesure du taux de comptage bêta

On sera sans doute un peu surpris d'apprendre que l'exactitude d'une mesure d'activité faite par échantillonnage sélectif n'est, en pratique, limitée ni par le principe de la méthode, ni (par exemple) par la fiabilité du dispositif électronique imposant le temps mort cumulatif T, mais par la mesure apparemment si simple de N_β, le taux de comptage bêta.

Le problème vient du fait que la séquence des impulsions bêta, originalement conforme à un processus de Poisson, a déjà subi des distorsions par la chaîne électronique quand elle nous est accessible. Alors qu'une analyse détaillée des déformations temporelles semble irréalisable, on peut espérer qu'une description simplifiée, qui traite l'ensemble de la perturbation comme un effet dû à un (premier) temps mort τ_1, sera suffisante pour nos besoins. Une fois ce modèle adopté, il s'agit de trouver un moyen qui permette de déterminer le type de τ_1 et sa valeur numérique exacte. Les méthodes habituelles n'étant pas applicables, une nouvelle approche s'impose. Après quelques tentatives d'utilisation de la densité expérimentale des intervalles, ou des déviations de la distribution de fréquence des impulsions par rapport à la loi de Poisson, il s'avère plus pratique de se fonder seulement sur des taux de comptage. Dans ce cas, on insère dans la voie bêta un deuxième temps mort (τ_2), dont le type et la valeur sont bien connus, et l'on mesure les taux de comptage avant (r) et après (R) ce second temps mort. Suivant le type choisi pour τ_2 et admis pour τ_1, quatre arrangements sont à étudier. L'analyse détaillée peut s'appuyer sur des résultats obtenus antérieurement. On trouve que deux situations donnent lieu à des formules assez compliquées, tandis que les deux cas où τ_1 et τ_2 sont de type différent se décrivent très facilement. Ainsi, on obtient

- pour τ_1 non cumulatif et τ_2 cumulatif :

$$\tau_1 = \frac{(1/r)\ \ln(r/R) - \tau_2}{\ln(r/R) - 1} ,$$

- pour τ_1 cumulatif et τ_2 non cumulatif :

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{1}{r} - \frac{1}{R} .$$

Un programme d'ordinateur permet, par un procédé itératif, la détermination de τ_1 pour les deux autres arrangements.

De nombreuses mesures ont montré que pour notre chaîne électronique le modèle d'un "premier" temps mort est valable; ce temps mort a la valeur $\tau_1 = (1{,}15 \pm 0{,}02)$ µs en le supposant du type cumulatif. Ce résultat est important pour nos mesures, car il nous permet de déterminer par la méthode d'échantillonnage sélectif des activités de sources jusqu'à 300 kBq environ avec une bonne exactitude, comme les résultats présentés sur la figure 3 le confirment.

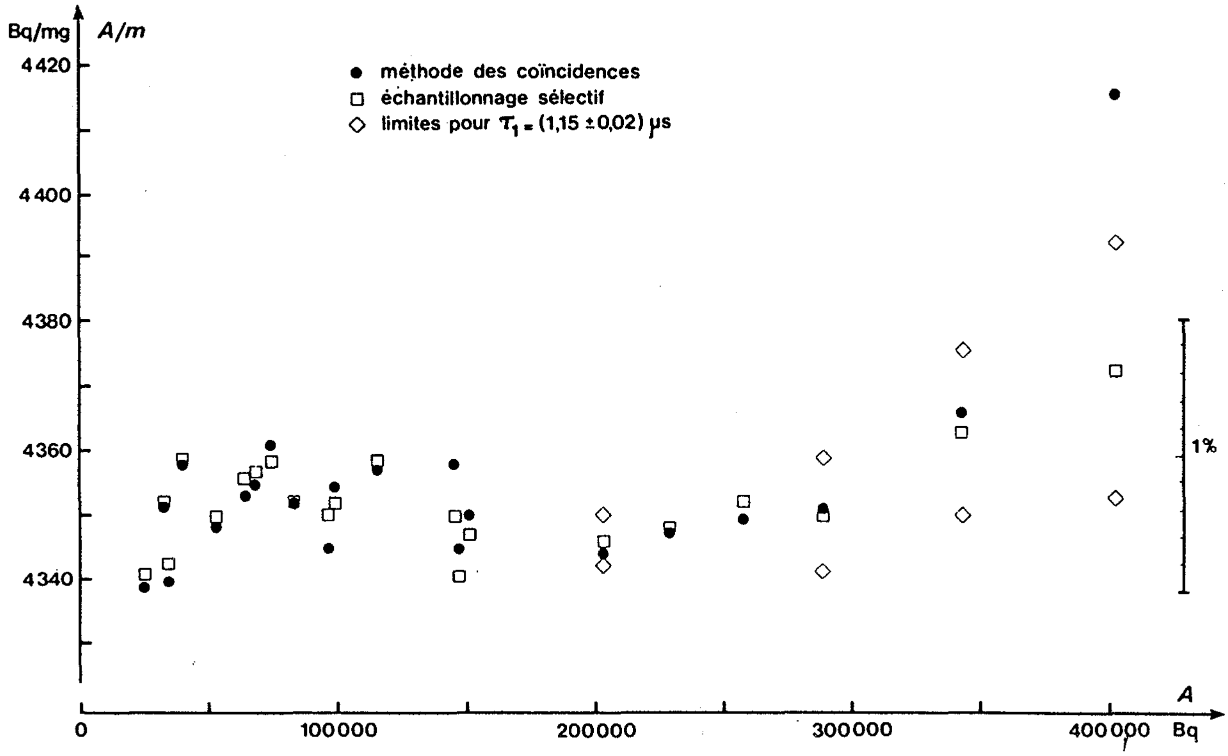

Fig. 3.- Activité massique A/m en fonction de l'activité A des sources, mesurée soit par la méthode des coïncidences (formule de Cox et Isham), soit par échantillonnage sélectif. Pour cette dernière méthode, l'incertitude due au premier temps mort τ_1 est parfois indiquée.

Autres travaux

Parmi les généralisations de la loi de Poisson, une des plus intéressantes consiste à associer à chaque événement un nombre entier qui suit également une loi de Poisson. Quelques-unes des propriétés statistiques d'une telle "double" distribution de Poisson sont établies dans BIPM WPN-224, où l'on indique aussi une éventuelle application de ce modèle au problème des impulsions secondaires. L'auto-convolution répétée d'une distribution a de multiples applications dans la théorie des processus stochastiques, et on a souvent besoin de connaître ses moments. Ce problème est traité de façon systématique dans le Rapport BIPM-82/15 et l'on arrive à une formule générale qui s'appuie sur les polynômes dits de Bell.

(Octobre 1983)