Incertitude d'un écart-type **(J.W. Müller)**

La nécessité d'estimer "l'écart-type d'un écart-type" se présente dans tous les cas où la variance d'une grandeur mesurée sert non seulement à indiquer la précision d'une valeur moyenne, mais surtout lorsque la variance contient en elle-même l'information recherchée. C'est pourquoi une méthode à la fois simple et générale permettant d'estimer l'erreur d'un écart-type à partir des données mesurées nous a semblé utile.

Admettons que n mesures d'une grandeur x ont été faites. Pour simplifier nous supposerons des poids égaux et n grand. Les estimations indiquées ci-dessous seront donc convergentes, mais pas nécessairement sans biais pour n petit.

Les moments d'ordre k de la variable aléatoire x, c'est-à-dire

$$m_k(x) = E\left\{x^k\right\} ,$$

s'estiment à l'aide des moments empiriques

$$\overline{x^k} = \frac{1}{n} \sum_i x_i^k$$

et l'on peut trouver comme estimation de leur variance

$$s^2(\overline{x^k}) = \frac{1}{n} \left[m_{2k}(x) - m_k^2(x)\right] .$$

Quant à l'écart-type empirique de la valeur moyenne

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \cong \frac{1}{n} \sqrt{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} ,$$

il s'ensuit pour son écart-type l'approximation

$$s\,(s(\overline{x})) \cong \frac{1}{2n} \sqrt{\frac{\mu_4(x) - \mu_2^2(x)}{\mu_2(x)}} ,$$

où $\mu_r(x) = E\left\{\left[x - E(x)\right]^r\right\} \cong E\left\{(x - \overline{x})^r\right\}$

est le moment centré d'ordre r.

On n'a donc besoin que des deuxième et quatrième moments centrés qui, à leur tour, peuvent être estimés à partir de l'échantillon disponible.

Cependant, en admettant que les observations sont réparties suivant un type de distribution connu, ces moments ne sont plus indépendants. Ainsi pour une distribution normale, par exemple, on vérifie aisément la relation

$$\mu_4 = 3\,\mu_2^2 \,.$$

Pour quelques-unes des lois de distribution les plus courantes on trouve pour l'erreur relative, définie par

$$R = s\,(s(x)\,)\,/\,s(x) \;=\; s\,(s(\bar{x})\,)\,/\,s(\bar{x})\,,$$

les estimations suivantes :

distributions		R
- de Gauss :	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x/\sigma)^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$
- exponentielle :	$f(x) = \rho e^{-\rho x}\,, \quad x > 0$	$\sqrt{\dfrac{2}{n}}$
- de Poisson :	$p(x) = e^{-\rho}\,\dfrac{\rho^x}{x!}\,, \quad x=0,\ 1,\ \ldots$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+2\rho}{n\rho}}$
- de Bernoulli :	$p(x) = \begin{cases} p & \text{pour } x = 1 \\ 1-p & \text{"} \quad x = 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-4p\,(1-p)}{np\,(1-p)}}$

Ces problèmes sont aussi traités dans un petit rapport interne intitulé "Estimation de l'incertitude d'un écart-type".

Juin 1969