

Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

L'application de procédés statistiques qui ont déjà montré leur utilité pratique se poursuit en parallèle avec l'élaboration de méthodes permettant une meilleure exploitation de mesures habituelles ainsi que l'interprétation de résultats acquis par un nouveau type de mesure. Pour illustrer ces deux dernières catégories, nous donnons dans ce qui suit un exemple pour chacune d'elles.

Influence de la décroissance sur la loi de Poisson

Dans la plupart des expériences où l'on mesure, pendant une durée fixe, le nombre de particules émises par un radionucléide, la décroissance de la source radioactive, si elle n'est pas négligeable, peut être prise en considération en utilisant pour l'espérance mathématique μ une valeur corrigée. Ainsi, le résultat suivra toujours la simple loi de Poisson

$$P_{\mu}(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Par contre, si la durée totale T de la mesure est subdivisée en un grand nombre n d'intervalles égaux de durée $t_0 = T/n$ et si pour chacun le nombre k d'événements observés est enregistré, l'ensemble de ces résultats peut avoir une allure qui diffère sensiblement d'une distribution de Poisson. De telles mesures peuvent être effectuées par exemple en utilisant le dispositif décrit récemment par P. Bréonce (Rapport BIPM-78/6) où la répartition de k , obtenue par accumulation, est constamment visible sur l'écran d'un sélecteur multicanaux. Puisque la déformation de la distribution est due à la décroissance du radionucléide observé, il doit être possible d'en déduire la période.

Admettons donc que le taux de comptage moyen en fonction du temps t soit décrit par la simple loi exponentielle

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

où $1/\lambda$ est la vie moyenne du nucléide considéré. Pour tenir compte de cette évolution temporelle, il convient de remplacer μ dans la formule précédente par $\mu(t) = \rho(t) \cdot t_0$ et d'intégrer l'expression qui en découle sur la durée totale T occupée par les mesures. Cela nous amène à la probabilité modifiée

$$\lambda^P(k) = {}_0P(k) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \exp [-\lambda kt + \mu_0(1-e^{-\lambda t})] dt ,$$

où $\mu_0 = \rho_0 \cdot t_0$ et ${}_0P(k) = P_{\mu_0}(k)$.

Le facteur de correction à appliquer à la probabilité de Poisson ${}_0P(k)$ qui ne tient pas compte de la décroissance est peu pratique sous cette forme d'une intégrale. Or, il est possible de le transformer dans les expressions suivantes

- pour $k = 0$:

$$\lambda^P(0) = {}_0P(0) \cdot \frac{e^{\mu_0}}{\mathcal{V}^{\mu_0}} [E_1(\mu_1) - E_1(\mu_0)] ,$$

- pour $k \geq 1$:

$$\lambda^P(k) = {}_0P(k) \cdot \frac{e^{\mu_0}}{\mathcal{V}^{\mu_0} \cdot \mu_0^k} [\gamma(k, \mu_0) - \gamma(k, \mu_1)] ,$$

où l'on a utilisé les notations

$$\mathcal{V}^{\mu_0} = \lambda T \quad \text{et} \quad \mu_1 = \rho(T) \cdot t_0 = \mu_0 e^{-\mathcal{V}^{\mu_0}} ,$$

tandis que

$$E_1(\mu) = \int_{\mu}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

$$\text{et} \quad \gamma(k, \mu) = \int_0^{\mu} e^{-x} x^{k-1} dx$$

sont les définitions habituelles de la fonction exponentielle intégrale et de la fonction gamma incomplète.

Les calculs nécessaires pour arriver aux expressions indiquées pour les facteurs de correction sont décrits en détail dans le Rapport BIPM-79/11.

On peut également déterminer l'espérance (E) et la variance (V) de k . Elles sont liées entre elles par la relation

$$R \equiv \frac{\lambda^V(k) - \lambda^E(k)}{\lambda^E^2(k)} = \frac{\mathcal{V}^{\mu_0}}{2} \cdot \frac{1 + e^{-\mathcal{V}^{\mu_0}}}{1 - e^{-\mathcal{V}^{\mu_0}}} - 1 .$$

Puisque le rapport R ne dépend que de \mathcal{V}^{μ_0} , sa valeur expérimentale permet une première estimation de λ .

Il a été possible d'arranger le calcul numérique de façon à l'incorporer dans un programme d'ordinateur où l'on évalue toutes les fonctions nécessaires.

Dans l'application de ces résultats à des données expérimentales, on est confronté avec deux complications supplémentaires car les distributions peuvent être modifiées par la présence d'un mouvement propre p et d'un temps mort τ . Dans cette situation plus générale, le taux de comptage moyen est décrit par

$$\rho(t) = \frac{p + \rho_0 e^{-\lambda t}}{1 + (p + \rho_0 e^{-\lambda t})\tau},$$

si τ est supposé du type non cumulatif. L'évaluation des expressions correspondantes pour $\lambda^k P(k)$ se complique de beaucoup. Néanmoins il est toujours possible d'arriver à des résultats numériques par des procédés voisins d'une simulation du comportement temporel. Leur fiabilité se vérifie à l'aide des deux premiers moments que l'on peut évaluer exactement*. A titre d'exemple nous avons analysé les résultats publiés récemment (1) concernant la désintégration du premier niveau excité du ^{116}In qui est métastable. Grâce à l'information supplémentaire fournie par les auteurs, nous avons pu faire les calculs nécessaires pour les paramètres expérimentaux appropriés, c'est-à-dire

$$t_0 = 0,2 \text{ s}, T = 4\,067,6 \text{ s}, \tau = 16 \mu\text{s} \text{ et } p = 0.$$

Le nombre total de mesures est $N = 10\,169$.

Le taux de comptage initial ρ_0 a été choisi de manière à ce que l'espérance mathématique de k corresponde à la valeur moyenne expérimentale. La variance est déterminée et comparée à la valeur déduite des observations. Le procédé est contrôlé par l'évaluation de la grandeur χ^2 , formée à l'aide des écarts entre valeurs calculées et valeurs mesurées. Le meilleur ajustement, représenté à la figure 1, correspond à une période $T_{1/2} = 3\,245 \text{ s}$. Cependant, la précision de cette valeur n'est sans doute pas très élevée et λ est difficile à estimer; compte tenu de la qualité médiocre des résultats expérimentaux (statistiquement parlant) et du bon accord avec la meilleure valeur actuellement admise, $T_{1/2} = (3\,249 \pm 4) \text{ s}$ (2), cette première mise en oeuvre d'une nouvelle méthode est très encourageante.

Les applications les plus prometteuses pourraient bien se situer dans le domaine des nouveaux éléments transuraniens à vie courte qui ne sont disponibles qu'en quantité infime.

* Voir BIPM WPN-212

(1) JORDAN (D.R.) and McBETH (G.W.), *Nucl. Instr. and Meth.*, 155, 1978, pp. 551-555.

(2) *Nuclear Data Sheets*, 14, 1975, p. 278.

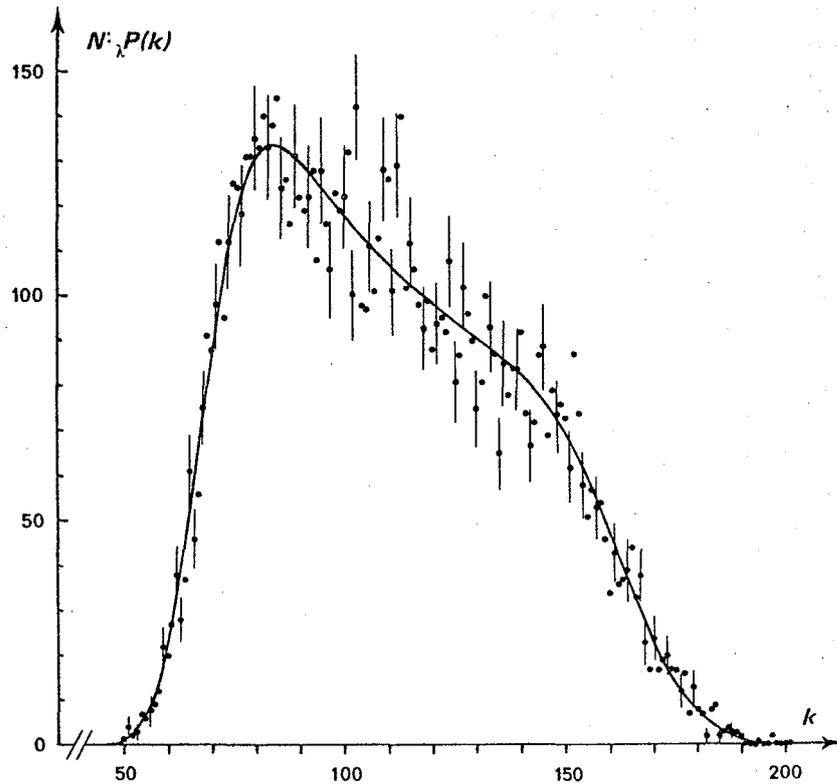


Fig. 1 .- Distribution de Poisson modifiée par décroissance.

Aux valeurs expérimentales pour une source de $^{116}\text{In}^m$, fournies par les auteurs cités, est superposée la courbe théorique qui donne le meilleur ajustement. Elle correspond à une période de 3 245 s. A titre indicatif, pour quelques résultats, on a représenté les incertitudes statistiques.

Ajustements simultanés

La mesure de l'activité d'une source radioactive à l'aide de la méthode $4\pi\beta\text{-}\gamma$ peut se faire de différentes façons dans le cas où il y a plusieurs rayonnements gamma (et bêta) émis. Toutefois, il faut que ceux-ci se séparent bien expérimentalement. En choisissant une fenêtre gamma en énergie qui ne contient qu'une seule transition, on obtient par exemple pour la représentation graphique de la grandeur $y = N_\beta N_\gamma / N_c$ en fonction de $x = N_\gamma / N_c - 1$ (où N_β , N_γ et N_c sont les taux de comptage corrigés des effets expérimentaux connus) une série de points (avec incertitudes statistiques s) plus ou moins bien alignés. Puisque N_c / N_γ est une mesure de l'efficacité bêta de l'enregistrement, l'extrapolation à $x = 0$ correspond à $\varepsilon_\beta = 1$ et dans ce cas $y(0) = N_0$ est l'activité recherchée de la source. Pour chaque transition gamma, on obtient ainsi une courbe dont cette extrapolation donne une estimation de l'activité N_0 . En pratique, cela s'effectue par l'ajustement d'un polynôme d'ordre donné aux mesures expérimentales.

Puisqu'il nous faut arriver à une valeur de l'activité qui soit indépendante de la branche de désintégration utilisée, on s'attend à ce que les différents résultats qui découlent de l'ajustement de chaque courbe soient compatibles entre eux. D'autre part, on peut aussi prendre la situation à l'envers et imposer comme condition supplémentaire que, pour $x = 0$, les différentes courbes se rencontrent en un seul point d'ordonnée A .

Si l'on a affaire à K courbes ($k = 1, 2, \dots, K$) et à des polynômes ne dépassant pas le deuxième degré, la courbe k reliant les ordonnées théoriques correspondant aux abscisses $x_{k,j}$ est donnée par l'expression

$$y_k(x_{k,j}) = A + B_k \cdot x_{k,j} + C_k \cdot x_{k,j}^2,$$

où j distingue les différentes mesures. Si les valeurs $Y_{k,j} \pm s_{k,j}$ désignent les résultats expérimentaux, la somme des carrés des écarts pondérés est donnée par

$$Q = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{j_k} g_{k,j} [y_k(x_{k,j}) - Y_{k,j}]^2,$$

où $g_{k,j} = s_{k,j}^{-2}$ est le poids statistique et j_k le nombre de points de la courbe k .

En imposant la condition des moindres carrés, on obtient comme d'habitude le système des équations normales

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial B_k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial C_k} = 0,$$

ce qui donne $2K + 1$ conditions pour déterminer A , B_k et C_k .

Écrit de façon plus explicite, le système est donc

$$A \sum_k [g_k] + \sum_k B_k [g_k x_k] + \sum_k C_k [g_k x_k^2] = \sum_k [g_k Y_k],$$

$$A \cdot [g_k x_k] + B_k [g_k x_k^2] + C_k [g_k x_k^3] = [g_k x_k Y_k] \quad \text{et}$$

$$A \cdot [g_k x_k^2] + B_k [g_k x_k^3] + C_k [g_k x_k^4] = [g_k x_k^2 Y_k],$$

où [...] indique une sommation sur j .

Pour plus de détails sur les calculs intermédiaires, voir le Rapport BIPM-79/12.

Afin de réduire numériquement ce système et d'obtenir les coefficients A , B_k et C_k , toujours avec leurs écarts-types respectifs, on fait avantageusement appel aux sous-programmes disponibles sur notre ordinateur IBM 1130. Un programme écrit en Fortran IV, qui peut traiter jusqu'à $K = 4$ branches et effectuer les ajustements successifs du premier au troisième degré, est disponible. Il a été largement utilisé pour faire les calculs que les récentes comparaisons internationales de ^{134}Cs et de ^{137}Cs ont nécessités.

Si les branches individuelles donnent des valeurs incompatibles pour l'activité, il est évident que ce n'est pas par un tel ajustement que l'on accordera des résultats contradictoires ; il vaudra alors mieux chercher la cause de l'échec. En revanche, dans le cas d'un accord raisonnable, ce procédé fournit de manière naturelle une valeur moyenne et un écart-type pour N_0 qui tiennent compte de l'ensemble des données. Si les mesures des différentes transitions ont été effectuées en même temps, il faudra appliquer la technique d'extrapolation multidimensionnelle développée à cet effet (3) qui tient compte des corrélations et aboutit généralement à des extrapolations linéaires.

Autres travaux

Parmi les études non encore décrites, mentionnons une autre tentative d'aborder les problèmes dus à la décroissance d'une source en déterminant la répartition des intervalles de temps qui séparent les impulsions enregistrées (Rapport BIPM WPN-211). Elle a donné lieu à quelques problèmes mathématiques délicats, entre autres à l'évaluation d'un certain type de somme infinie. L'établissement d'une solution générale a finalement été possible grâce à une exploitation minutieuse de calculs numériques faits sur ordinateur avec grande précision. Cette approche est décrite dans le Rapport BIPM-79/1.

Dans le cadre de la section II du CCEMRI, un groupe de travail s'est occupé, entre autres, de l'établissement de deux nouvelles bibliographies qui portent respectivement sur les problèmes d'empilement d'impulsions et le comptage par corrélation. Les préparatifs d'une nouvelle édition augmentée et mise à jour de la bibliographie sur les problèmes de temps mort de 1975 sont bien avancés.

(3) SMITH (D.) and STUART (L.E.H.), *Metrologia*, 11, 1975, pp. 67-72.