Note sur l'écriture de certaines équations

P. Carré

Les exemples donnés dans cette Note sont tirés du document "Formule pour la détermination de la masse volumique de l'air humide" (Rapport BIPM-79/10, mai 1979).

I.- Équations entre grandeurs et équations entre valeurs numériques (1)

Les grandeurs physiques qui peuvent être comparées entre elles peuvent être groupées en catégories. On aura ainsi dans la même catégorie les longueurs, les diamètres, les hauteurs, les longueurs d'onde, etc. Quand on choisit, dans une telle catégorie, une grandeur particulière comme grandeur de référence, appelée unité, toute autre grandeur de la même catégorie peut être exprimée comme produit de l'unité par un nombre appelé valeur numérique de la grandeur exprimée avec cette unité.

Deux types d'équations sont utilisées dans la science et la technique: les équations entre grandeurs et les équations entre valeurs numériques.

l.- En règle générale, un symbole de grandeur représente la totalité de la grandeur physique (c'est-à-dire le produit d'une unité, quelle qu'elle soit, par la valeur numérique de la grandeur exprimée avec cette unité).

Les relations mathématiques qui existent entre les grandeurs physiques, et qui sont les conséquences des définitions des grandeurs et des lois physiques, se traduisent ainsi par des équations entre les symboles des grandeurs, équations qui ont l'avantage d'être indépendantes du choix des unités.

Exemples:
$$pV = nZRT$$
, (1)

$$\frac{\rho}{-} = \frac{pM}{ZRT} , \qquad (2)$$

où p est la pression, V le volume, T la température thermodynamique, n la quantité de matière, Z le coefficient de compressibilité, ρ la masse volumique, M la masse molaire d'un gaz réel ; R est la constante des gaz.

⁽¹⁾ D'après ISO, Projet de norme internationale ISO/DIS 31/0, 1979.

2.- En revanche, les équations entre les valeurs numériques des grandeurs dépendent du choix des unités.

Partons par exemple de l'équation entre grandeurs

$$m = \rho V_{\bullet} \tag{3}$$

ou m est la masse, ρ la masse volumique et V le volume d'une substance homogène \overline{q} uelconque.

Si nous utilisons des unités cohérentes, par exemple les unités SI kilogramme, kilogramme par mètre cube et mètre cube, et si nous représentons par $\{G\}_{\mathbf{u}}$ la valeur numérique de la grandeur G exprimée avec l'unité \mathbf{u} , nous pouvons écrire l'équation entre valeurs numériques correspondante suivante

$$\{m\}_{kg} = \{\rho\}_{kg \cdot m} - 3 \cdot \{V\}_{m} 3, \qquad (4)$$

qui ne comporte pas de facteur numérique, alors que si, par exemple, nous prenons le kilogramme par litre comme unité de masse volumique, nous devons écrire

$$\{m\}_{kg} = 10^3 \cdot \{\underline{\rho}\}_{kg/1} \cdot \{V\}_{m}^3, \tag{5}$$

équation qui comporte le facteur numérique 10³. Un autre choix des unités conduirait généralement à un facteur numérique différent.

3.- Les relations qui comportent des facteurs déterminés expérimentalement peuvent aussi être exprimées soit sous la forme d'équations entre grandeurs, soit sous la forme d'équations entre valeurs numériques.

Par exemple, si nous appliquons l'équation (2) à l'air sec, en adoptant pour M et R les valeurs respectives 28,963 5 x 10^{-3} kg·mol⁻¹ et 8,314 41 J·mol⁻¹·K⁻¹, d'ailleurs dans une certaine mesure arbitraires, nous obtenons

$$\rho_{a} = 3,483 \ 53 \ x \ 10^{-3} \ kg \cdot K \cdot J^{-1} \ x \ \frac{p}{ZT}$$
(6)

qui est encore une équation entre grandeurs.

Naturellement, nous pourrions l'écrire sous la forme équivalente

$$\underline{\rho}_{a} = C \cdot \frac{p}{ZT}$$
avec $C = 3,483 \quad 53 \quad \times \quad 10^{-3} \quad \text{kg} \cdot \text{K} \cdot \text{J}^{-1}$

$$(6 \text{ bis})$$

mais il ne semble pas que l'on ait des arguments décisifs pour recommander systématiquement l'une de ces formes plutôt que l'autre.

Si, maintenant, nous choisissons une unité pour chacune des grandeurs dont le symbole figure dans l'équation (6), nous pouvons transformer cette équation en une équation entre valeurs numériques.

Ainsi, avec les unités SI, nous obtenons

$$\{\underline{\rho}_{\mathbf{a}}\}_{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}^{-3} = 3,483 \ 53 \ \times \ 10^{-3} \ \times \frac{\{p\}_{\mathrm{Pa}}}{\{Z\}\{T\}_{\mathrm{K}}}$$
 (7)

(on n'a pas indiqué l'unité du facteur de compressibilité \mathbb{Z} , qui n'est autre que le nombre l).

II.- Écriture de certaines formules

En préparant le document cité en tête de cette Note, le Groupe de travail s'est attaché à alléger l'écriture des formules, toute ambiguïté étant évitée grâce aux indications données dans le texte. Ainsi, toutes les formules sont des équations entre grandeurs sauf les formules 22, 23 et 24 qui, à vrai dire, ne sont pas non plus des équations entre valeurs numériques.

Bien qu'adaptées à l'utilisation pratique, elles sont en toute rigueur critiquables.

1.- Transformation en équations entre valeurs numériques

Les unités avec lesquelles doivent être exprimées les grandeurs qui figurent dans ces formules sont données dans le texte. La transformation est donc aisée. On obtient

$$(22) \rightarrow \{p_{sv}\}_{pa} = \exp[1,28..x10^{5} \{T\}_{K}^{2} - 1,95..x10^{-2} \{T\}_{K} + 3,40..x10^{1} - 6,35..x10^{3} / \{T\}_{K}]$$
(8)

$$(23) \rightarrow \{f\} = 1,000 \ 62 + 3,14 \times 10^{-8} \{p\}_{Pa} + 5,6 \times 10^{-7} \{t\}_{C}^{2}$$

$$(24) \rightarrow \{Z\} = 1 - \frac{\{p\}_{Pa}}{\{T\}_{K}} \left[1,62..x10^{-6} - 2,8..x10^{-8}\{t\}_{\circ_{C}} + 1,0..x10^{-10}\{t\}_{\circ_{C}}^{2} + (5,7..x10^{-6} - 2,5..x10^{-8}\{t\}_{\circ_{C}})\{x_{V}\} + (...) \{x_{V}\}^{2}\right] + \frac{\{p\}_{Pa}^{2}}{\{T\}_{V}^{2}} \left[.....\right]$$

$$(10)$$

2.- Transformation en équations entre grandeurs

Les valeurs numériques étant égales aux quotients des grandeurs par les unités, il est facile de regrouper ces unités avec les coefficients numériques. En tenant compte de l'égalité des unités kelvin et degré Celsius, on obtient

(22)
$$\rightarrow p_{sv} = 1 \text{ Pa.x.} \exp \left[1,28..x10^{-5} \text{ K}^{-2}xT^2 - 1,95..x10^{-2} \text{ K}^{-1}xT + 3,40..x10^1 - 6,35..x10^3 \text{ K/T}\right]$$
 (11)

(23)
$$\rightarrow f = 1,000 \ 62 + 3,14 \times 10^{-8} \ Pa^{-1} \times p + 5,6 \times 10^{-7} \ K^{-2} \times t^{2}$$
 (12)
(24) $\rightarrow Z = 1 - \frac{p}{T} \left[1,62..x10^{-6} \ K \cdot Pa^{-1} - 2,8..x10^{-8} \ Pa^{-1}xt + 1,0..x10^{-10} \ K^{-1} \cdot Pa^{-1}xt^{2} + ... + ... \right] + \frac{p^{2}}{T^{2}} \left[.... \right]$

III. - Choix d'une notation pour les valeurs numériques

La notation employée jusqu'ici dans cette Note est utilisée dans la référence (1) qui donne aussi, à titre d'exemple, la notation $\underline{\lambda}$ /nm (valeur numérique d'une longueur d'onde $\underline{\lambda}$ exprimée en nanomètres). Cette dernière écriture est préconisée dans la référence (2) pour les en-têtes des tableaux et l'identification des axes des graphiques. La justification donnée est que les opérations sur les équations impliquant des grandeurs physiques, des unités et des facteurs numériques suivent les règles ordinaires de l'algèbre.

Cette écriture n'est toutefois pas adoptée par certaines normes nationales (3) où 1'on peut lire: ".. il est déconseillé d'utiliser un symbole d'unité dans un texte ou une formule algébrique sans qu'il soit associé à une valeur numérique écrite en chiffres", et où l'on conseille, dans les en-têtes de tableaux, d'indiquer le symbole de l'unité choisie, entre parenthèses ou non, sous chaque titre de colonne.

Finalement, cette écriture consiste à représenter la valeur numérique G/l u de la grandeur G exprimée avec l'unité u sous la forme abrégée G/u. Elle a le mérite de la simplicité et viendra certainement à s'imposer dans les normes internationales et nationales.

Si l'on s'astreint à n'utiliser que des expressions du type G/u, il n'y a pas de très grands risques de confusion puisqu'au numérateur on trouve un symbole de grandeur et au dénominateur un symbole d'unité.

Mais il sera bien tentant de remplacer $(1/T)/K^{-1}$ par K/T

$$\underline{\alpha}/K^{-1}$$
 par $\underline{\alpha} \cdot K$
 $\underline{\beta}/K^{-2}$ par $\beta \cdot K^2$
 $S/(JK^{-1})$ par $S \cdot K/J$
 $\underline{\rho}/(kg \cdot m^{-3})$ par $\rho \cdot m^3/kg$, etc,

c'est-à-dire, tout simplement, d'appliquer les règles ordinaires de l'algèbre.

Il sera alors capital d'utiliser les caractères corrects : italiques pour les symboles de grandeurs, romains pour les symboles d'unités.

⁽²⁾ IUPAC, Manual of symbols and terminology for physicochemical quantities and units, Pergamon press, 1979.

⁽³⁾ Norme NF X 02-003, Principes de l'écriture des nombres, des grandeurs des unités et des symboles, AFNOR, 1976.

Voici, pour illustrer cette nécessité, deux équations dans lesquelles je me suis efforcé de faire apparaître à la fois des symboles de grandeurs et des symboles d'unités.

l.- Équation entre valeurs numériques : volume V exprimé en litres d'un cube dont la longueur $\mathcal I$ de l'arête est exprimée en décimètres

$$\frac{V}{1} = \left(\frac{z}{dm}\right)^3$$

2.- Équation entre grandeurs : moment d'inertie J_1 d'une sphère pleine, homogène, de masse m, de rayon égal à 1 m, par rapport à son diamètre

$$J_1 = \frac{2}{5} m \cdot m^2$$

12 septembre 1979