BIPM/69-1

P. CARRE

COMPLEMENT A

TRAVAUX DU MOIS DE JANVIER 1969

Cette note est le complément annoncé par la note du 30 octobre 1968 (travaux du mois d'octobre 1968).

SOUS-PROGRAMMES DE PRECISION ETENDUE AMELIOREE

ARC TANGENTE

La formule de changement de variable donnée précédemment

$$tg\ (y - \alpha) = \frac{1}{tg\alpha} - \frac{1 + \frac{1}{tg^2\alpha}}{x + \frac{1}{tg\alpha}}$$

est économique en opérations. Malheureusement, dans l' intervalle

$$+\frac{\pi}{18} \text{ à } +\frac{3\pi}{18},$$

le premier terme est de l'ordre de 3, la différence des deux termes ne dépassant pas $\pm$ 0,176. On perd donc de la précision.

Je suis [redacted] revenu au changement de variable

$$tg\ (y - \alpha) = \frac{\frac{x}{tg\alpha} - 1}{\frac{1}{tg\alpha} + x}$$

qui comporte une multiplication de plus que le précédent mais on gagne en précision et on évite de mémoriser les 4 valeurs de $1/tg^2\alpha$.

Les valeurs utilisées sont :

$$1/tg\ \frac{\pi}{9} = 2{,}7474774194539$$

$$1/\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{9} = 1{,}1917535925865$$

$$1/\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = 0{,}5773502691954$$

$$1/\mathrm{tg}\,\frac{4\pi}{9} = 0{,}1763269807089.$$

Les valeurs ci-dessus n'ont pu être considérées comme définitives qu'après la mise au point du sous-programme sinus-cosinus.

De même, en soumettant ces sous-programmes à diverses vérifications on a confirmé tous les coefficients du développement polynomial de tg u entre

$$-\frac{\pi}{18} \quad \text{et} \quad +\frac{\pi}{18}$$

sauf celui de u^{11} qui avait été donné égal à

$$-\ 0{,}090\ 575\ 046\ 111\ 8$$

et pour lequel j'ai adopté

$$-\ 0{,}090\ 575\ 046\ 111\ 6.$$

La durée du calcul d'arctg est 11 ms pour l'intervalle ci-dessus, 24 ms pour les autres intervalles, à cause du changement de variable.

SINUS-COSINUS-TANGENTE

D'abord, on exprime l'angle x en tours et on le ramène au domaine - 0,5 à + 0,5.

Si $x > 1/4$ ou $x < -1/4$ on le remplace par $1/2 - x$ ou $-1/2 - x$ et on note que l'on devra changer le signe pour cosinus mais non pour sinus.

Alors, si $x > 1/6$ ou $x < -1/6$ on le remplace par $1/4 - x$ ou $-1/4 - x$; on lance le calcul de cosinus si on a demandé sinus et réciproquement. (1)

Si $-1/12 \leqslant x \leqslant 1/12$ on lance le calcul.

Le cas le plus compliqué est

$$1/12 < x \leqslant 1/6 \quad \text{ou} \quad -1/6 \leqslant x < -1/12.$$

Si on a demandé le cosinus on calcule $\frac{x}{2}$ puis cos $\frac{x}{2}$ puis on calculera cos x par $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.

Si on a demandé le sinus on fait le changement de variable (1) ce qui ramène au cas ci-dessus.

Je me ramène donc toujours au domaine $-\frac{1}{12}$ à $+\frac{1}{12}$ (soit $-\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{6}$). J'utilise les développements polynomiaux suivants (polynomes de Tchebichef) que j'ai obtenus grâce aux sous-programmes de double précision et moyennant un travail assez considérable.

$$\cos(2\pi x) = 1{,}000\,000\,000\,000 - 19{,}739\,208\,796\,236\,x^2 + 64{,}939\,387\,143\,590\,x^4 - 85{,}454\,042\,054\,247\,x^6 + 59{,}787\,415\,351\,602\,x^8$$

$$\frac{\sin(2\pi x)}{x} = 6{,}283\,185\,307\,184 - 41{,}341\,702\,232\,836\,x^2 + 81{,}605\,243\,210\,448\,x^4 - 76{,}703\,863\,848\,932\,x^6 + 41{,}771\,170\,759\,224\,x^8.$$

Tout cela est fait en virgule fixe sauf la multiplication initiale par $\frac{1}{2\pi}$ pour transformer les radians en tours. Dans le cas du sinus il faut encore multiplier par x (virgule flottante).

Dans le cas de la tangente on calcule d'abord le sinus puis le cosinus mais on ne fait qu'une fois les changements de variable du début.

La durée du calcul de sinus est 11 ms, celle de cosinus 10 ms, celle de tangente 20 ms.

CONCLUSION

Ces sous-programmes remplacent les sous-programmes provisoires qui ont permis à la Précision Etendue Améliorée de fonctionner depuis juillet. Ils sont beaucoup plus rapides. La transformée de Fourier de e^{-x^2} redonne la fonction elle-même avec une erreur de quelques unités de la 12^e décimale, comme par le passé mais en dix fois moins de temps.

Sans doute y a-t-il des erreurs dans ces sous-programmes.

La chasse est ouverte depuis fin décembre 1968.

Sèvres 3 février 1969.