Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

A la suite de la découverte récente d'erreurs systématiques dans la mesure absolue d'activités par la méthode $4\pi\beta\text{-}\gamma$ pour des taux de comptage élevés, de l'ordre de 10^5 s^{-1} et au-delà, plusieurs laboratoires se sont engagés dans la recherche des causes des écarts observés. Un des résultats les plus utiles de ces efforts est l'établissement d'une nouvelle formule par Cox et Isham permettant de mieux calculer l'activité à partir des taux de comptage mesurés sur les voies bêta, gamma et des coïncidences. Or, entre temps, des mesures comparatives de haute précision ont mis en évidence la nécessité d'appliquer des corrections supplémentaires dont la nouvelle formule ne tient pas compte. Ces problèmes sont pour la plupart liés à la mesure du taux des coïncidences qui dépend, entre autres, des empilements, du "time jitter" et du retard relatif entre les deux voies qu'il est maintenant nécessaire - faute de correction fiable - de réduire à une valeur ne dépassant pas quelques nanosecondes.

Si, en dépit de leur intérêt, ce ne sont pas ces problèmes qui seront traités dans ce qui suit, c'est parce que l'application d'une toute nouvelle méthode, dont le principe sera décrit ailleurs, permet de les éviter. En remplaçant la simultanéité par une condition de causalité pour distinguer les impulsions provenant de la même désintégration des autres qui ne sont pas corrélées, l'emploi d'un circuit à coïncidences peut être supprimé. Cela nous enlève tous les ennuis qui sont liés à la mesure des coïncidences. D'autre part, l'application expérimentale de cette nouvelle approche a clairement mis en évidence qu'il y a encore des problèmes à résoudre, même pour une seule voie, que l'on n'a plus le droit de négliger dans le domaine des taux de comptage très élevés.

L'effet le plus important est alors sans doute dû à la distorsion produite sur les impulsions bêta par le compteur proportionnel et l'électronique associée. En décrivant cette influence par un premier temps mort τ_1 qui précède celui qui est imposé volontairement (appelé τ_2), on a affaire à un arrangement en série de deux temps morts. En principe, cette situation est bien connue, mais dans notre cas elle est compliquée par le fait que ni la valeur ni le type de τ_1 ne sont bien connus. Leur détermination expérimentale, pour un dispositif donné, devient alors une tâche primordiale. C'est dans cette perspective que nous avons élaboré une approche qui utilise l'asymétrie empirique d'une distribution de comptage pour en déduire par le calcul, en combinaison avec la valeur moyenne et la variance observées, les caractéristiques de τ_1 .

Asymétrie d'une distribution de comptage

Par une étude semblable à celle entreprise récemment (Rapport BIPM-77/1) pour obtenir des formules asymptotiques pour l'espérance $\hat{k}(t)$ et la variance $\sigma_k^2(t)$ d'un processus de renouvellement du type modifié, on a obtenu, après des calculs souvent fastidieux, une expression générale pour le troisième moment centré du nombre k d'événements qui arrivent pendant un temps de mesure t . Cette quantité est définie par l'espérance

$$\mu_3(t) = E \{(k - \hat{k})^3\}, \quad \text{où } \hat{k} = E \{k\}.$$

Le résultat de calcul peut être exprimé à l'aide des moments de l'intervalle de temps qui sépare deux impulsions successives dont la densité est donnée par $f(t)$, et des moments analogues se référant au temps d'apparition du premier événement de densité ${}_0f(t)$. Ces moments d'ordre r sont désignés par

$$m_r = E \{t^r\} \quad \text{et} \quad \mu_r = E \{(t - m_1)^r\},$$

et, au lieu de μ_2 , on notera σ^2 . Les moments analogues pour la densité initiale ${}_0f(t)$ seront notés respectivement ${}_0m_r$ et ${}_0\mu_r$. Le résultat final pour le troisième moment centré du nombre d'impulsions enregistrées dans t peut alors être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mu_3(t) = & \frac{t}{m_1} (3 \sigma^4 - m_1 \mu_3) + \frac{1}{4 m_1} \left[22 \sigma^6 - 4 m_1 (3 {}_0m_1 \sigma^4 + 5 \sigma^2 \mu_3) \right. \\ & \left. + m_1^2 (4 {}_0m_1 \mu_3 + 12 {}_0\sigma^2 \sigma^2 + 3 \mu_4 - 9 \sigma^4) - 4 {}_0\mu_3 m_1^3 \right]. \end{aligned}$$

Cette expression générale, valable pour un processus de renouvellement de type modifié, peut être appliquée aux types de processus habituellement utilisés, en particulier au processus ordinaire qui débute par un événement enregistré, et au processus stationnaire où l'origine de temps est choisie au hasard.

Des formules directement utiles sont finalement obtenues si l'on suppose avoir affaire à un processus original de Poisson qui a été perturbé par un temps mort. Les résultats correspondants sont rassemblés dans le tableau III, où l'on utilise les abréviations $x = \rho\tau$, $\lambda = 1/(1+x)$ et $y = \exp x$.

TABLEAU III

Expressions asymptotiques pour le troisième moment centré dans le cas d'un processus original de Poisson (avec taux ρ) perturbé par un temps mort τ de type non cumulatif ou cumulatif

a) Pour un temps mort non cumulatif

$$\begin{array}{l} \text{Processus ordinaire} \\ \text{Processus stationnaire} \end{array} \quad \mu_3(t) = \lambda^4 (3\lambda - 2) \cdot \rho t + \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda^4 (11\lambda^2 - 20\lambda + 9) \\ 3 \lambda^4 (\lambda - 1)^2 \end{cases}$$

b) Pour un temps mort cumulatif

$$\begin{array}{l} \text{Processus ordinaire} \\ \text{Processus stationnaire} \end{array} \quad \mu_3(t) = (y-3x)^2 \cdot \rho t / y^3 + \begin{cases} -x (y^2 - 9xy + 17x^2) / y^3 \\ \frac{3}{2} x^2 (2y - 7x) / y^3 \end{cases}$$

Pour un temps de mesure t suffisamment long par rapport à τ , et en supposant que $x \ll 1$, on obtient

$$\mu_3(t) \simeq \rho t (1 - 7x).$$

Puisque dans cette même approximation

$$\hat{k}(t) \simeq \rho t (1 - x),$$

le rapport du troisième au premier moment est donné par

$$W \equiv \frac{\mu_3(t)}{\hat{k}(t)} \simeq 1 - 6x.$$

Une comparaison avec l'expression analogue pour la variance,

$$V = \frac{\sigma_k^2(t)}{\hat{k}(t)} \simeq 1 - 2x,$$

indique que l'influence d'un temps mort est environ trois fois plus importante sur $\mu_3(t)$ que sur $\sigma_k^2(t)$.

On peut montrer que l'incertitude expérimentale sur W est à peu près trois ou quatre fois plus grande que celle sur V si l'on choisit $\hat{k}$ dans le domaine de 1 à 3 environ. Dans ces conditions, la mesure de V et de W donne pour le temps mort deux valeurs de précision comparable et on peut espérer que leur emploi simultanément nous renseignera aussi sur le type.

De multiples mesures, dont chacune comprenait entre 2 et 5 millions d'échantillons, ont dans l'essentiel bien confirmé ces prévisions, quoique la détermination du type du temps mort reste encore incertaine. Si on le suppose cumulatif, tous les résultats sont compatibles avec une valeur $\tau_1 = (1,20 \pm 0,05) \mu\text{s}$ pour un domaine du taux de comptage qui va de 50 000 à 250 000 s^{-1} environ. Pour notre équipement, on en déduit pour $\rho = 200\,000 \text{ s}^{-1}$ une correction qui atteint presque 2 %. Pour plus de détails techniques sur cette étude, voir le Rapport BIPM WPN-209 et surtout le Rapport BIPM-78/5.

Détection de fluctuations supplémentaires dans un processus de Poisson

La détermination d'un temps mort en utilisant la distorsion qu'il produit sur le processus original et que l'on peut mesurer, par exemple à l'aide des rapports V et W définis plus haut, suppose évidemment l'absence de toute autre déformation du processus de comptage. En particulier, le résultat numérique serait erroné si des fluctuations additionnelles, dont la présence pourrait par ailleurs être peu gênante, perturbaient les moments. De telles influences peuvent en effet provenir de la variation de paramètres tels que la pression ou la composition chimique du gaz utilisé dans le compteur proportionnel, qui sont difficiles à contrôler pendant une mesure.

Un modèle simple permet d'estimer l'effet dû à ces influences ou d'en vérifier l'absence. Dans ce but, on suppose que l'efficacité de détection ε , au lieu d'être constante, varie de façon aléatoire selon une loi gamma, ce qui se traduit pour l'espérance $\mu = N_0 t \varepsilon$ par une densité de probabilité

$$f(\mu) = \frac{e^{1/b}}{\Gamma(1/b)} \cdot \mu^{-1+1/b} \cdot e^{-c\mu}, \quad \text{pour } \mu > 0,$$

avec $b > 0$ et $c > 0$. Cela implique une fluctuation relative de μ qui est donnée par

$$\frac{\sigma(\mu)}{m_1(\mu)} = \sqrt{b}.$$

La distribution originale de Poisson

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

est donc modifiée par la variation de μ et doit être remplacée par

$$W(k) = \int_0^{\infty} P(k) \cdot f(\mu) \, d\mu.$$

Cette intégrale peut être évaluée et elle s'exprime par plusieurs formules équivalentes. Une forme particulièrement pratique pour ce qui suit est

$$W(k) = \frac{\mu^k}{k!} \left[\frac{1}{1 + b\mu} \right]^{k+1/b} \prod_{j=1}^{k-1} (1 + jb),$$

où l'espérance est maintenant donnée par $\hat{k} = 1/bc \equiv \mu$.

Cette expression est connue sous le nom de distribution de Pólya (ou loi binomiale négative). Sa variance et son troisième moment centré sont donnés par

$$\sigma^2(k) = \mu (1 + b\mu) \text{ et}$$

$$\mu_3(k) = \mu (1 + 3b\mu + 2b^2\mu^2).$$

Une comparaison avec la loi de Poisson est facilitée par un développement en série qui est valable pour de petites valeurs du paramètre b , c'est-à-dire pour de faibles distorsions, ce qui est le cas qui nous intéresse le plus.

Dans ces conditions, on peut arriver à l'approximation

$$W(k) \approx P(k) \left\{ 1 + \frac{b}{2} \left[(\mu - k)^2 - k \right] \right\}.$$

Il s'ensuit que $W(k)$ coïncide avec $P(k)$, qui est la distribution de Poisson basée sur la même valeur moyenne μ , si

$$(\mu - k)^2 - k = 0,$$

donc pour

$$k_{1,2} = \mu + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\mu + \frac{1}{4}}.$$

Par conséquent, si l'on regarde les signes des déviations $W(k) - P(k)$, on s'aperçoit qu'ils sont négatifs pour $k_1 < k < k_2$, mais positifs à l'extérieur de ce domaine. Cette propriété peut être utilisée pour contrôler par un test de signes si une perturbation du type envisagé se manifeste ou non dans les mesures. Il est intéressant de noter qu'une déformation du même genre (et avec les mêmes valeurs pour k_1 et k_2), mais de sens opposé, avait été trouvée il y a quelque temps (Rapport BIPM-72/10) pour la distorsion produite par un temps mort sur une distribution de Poisson.

Pour vérifier ce comportement, on a effectué des mesures, dans des conditions très variées, des fréquences du nombre k d'événements observés, après avoir introduit des fluctuations aléatoires, mais contrôlables, au moyen d'un temps de mesure t qui était à son tour déterminé par l'arrivée d'impulsions appartenant à un processus de Poisson indépendant. La confirmation des prévisions était excellente. Pour une description détaillée de cette étude, on consultera le Rapport BIPM-78/2.

Autres travaux

Les problèmes concernant l'évaluation et la présentation de l'incertitude d'une mesure expérimentale sont bien connus et ont déjà fait couler beaucoup d'encre. Nous venons d'y apporter notre contribution modeste en rassemblant quelques idées tout élémentaires sur ces questions dans le Rapport BIPM-78/4. En particulier, on y émet un doute sur le bien-fondé de l'habitude qui consiste à distinguer soigneusement entre erreurs aléatoires et systématiques et à caractériser ces dernières par une limite maximale qui ne devrait jamais être dépassée. Il nous semble plutôt que l'application de la règle simple connue sous le nom de propagation des erreurs, dans sa forme générale, soit suffisante pour résoudre la plupart des problèmes habituellement soulevés, pourvu que la description de la situation expérimentale repose sur un schéma adéquat.

Notre atelier d'électronique a construit un dispositif qui permet de stocker dans la mémoire d'un analyseur multicanaux le nombre d'impulsions enregistrées dans un intervalle de temps donné. Cet appareil, qui a été beaucoup utilisé dans des études précédentes, est décrit dans le Rapport BIPM-78/6.

L'utilité éventuelle du formalisme des fractions continues pour la détermination de l'exactitude que l'on peut attendre dans la mesure d'un temps mort par la méthode des deux oscillateurs a été discutée dans le Rapport BIPM WPN-208. Enfin, quelques anomalies apparaissant dans la transformation de moments de différents types sont discutées dans le Rapport BIPM WPN-210.

(Octobre 1978)