

Statistiques de comptage

Jörg W. Müller

Dans le but de mieux comprendre les processus sur lesquels s'appuie la méthode $4\pi\beta\text{-}\gamma$ pour la mesure absolue d'activités et d'en tirer profit dans les applications, en particulier sous forme de corrections plus sûres, on a de nouveau entrepris un certain nombre d'études. A titre d'exemple, deux d'entre elles seront brièvement décrites, tout en se limitant à quelques résultats d'intérêt général et en omettant les dérivations que l'intéressé peut trouver dans des rapports internes.

Résultats asymptotiques pour l'espérance et la variance du nombre d'impulsions enregistrées

Si l'on ne se contente pas d'identifier un processus réel de comptage à un simple processus de Poisson, mais qu'on essaie de le décrire par un meilleur modèle qui tient compte des modifications apportées d'une part par l'imposition de temps morts et, d'autre part, par le choix des conditions initiales (origine du temps de mesure par rapport à l'arrivée d'une impulsion), l'évaluation de résultats utiles pour des applications se complique beaucoup. Néanmoins, grâce aux efforts faits par plusieurs auteurs, on dispose maintenant d'une liste pratiquement complète des paramètres les plus importants servant à caractériser le comportement statistique de tels processus. Il s'agit, en particulier, de la probabilité $W_k(t)$ d'observer exactement k événements dans un intervalle de temps t et des deux premiers moments de k , c'est-à-dire de l'espérance $\bar{k}(t)$ et de la variance $\sigma_k^2(t)$.

On admet au départ que l'on a affaire à un processus original de Poisson et que le type et la valeur du temps mort sont connus. Les calculs nécessaires pour traiter les six cas particuliers (trois types de processus et deux types de temps mort) sont en général assez fastidieux et donc sujets à erreurs. De plus, ils ne se prêtent que difficilement à une éventuelle extension à des conditions plus générales.

Pour la situation habituellement rencontrée où le temps de mesure t est long par rapport aux intervalles entre impulsions successives, il existe des procédés mathématiques permettant de déduire des relations dites asymptotiques d'une grande généralité pour des processus de renouvellement, et c'est de ce fait que l'on peut essayer de tirer parti pour nos besoins.

Le modèle approprié est un processus du type "modifié" pour lequel la densité d'intervalles entre impulsions est donnée par $f(t)$, tandis que l'arrivée du premier événement (après $t = 0$) est décrite par ${}_0f(t)$. Par conséquent, à l'arrivée de l'impulsion numéro k correspond la densité

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} {}_0f(t) & \text{pour } k = 1, \\ {}_0f(t) * \left\{ f(t) \right\}^{*(k-1)} & \text{pour } k \geq 2. \end{cases}$$

La fonction ${}_0f(t)$ sera spécifiée plus tard pour les différents modes de comptage.

On peut montrer que la forme asymptotique des moments du nombre k d'événements arrivant dans l'intervalle t s'exprime à l'aide des moments se référant aux intervalles, donc de $f(t)$ et ${}_0f(t)$. Il est usuel de définir le moment ordinaire d'ordre r de t par

$$m_r = \int_0^{\infty} t^r \cdot f(t) dt, \quad r = 1, 2, \dots,$$

ou aussi le moment centré par

$$\mu_r = \int_0^{\infty} (t - m_1)^r \cdot f(t) dt, \quad r = 2, 3, \dots$$

De façon analogue, on définit les moments ${}_0m_r$ et ${}_0\mu_r$ de t pour la densité ${}_0f(t)$.

Au lieu de μ_2 on note le plus souvent σ^2 . Après un certain nombre de calculs intermédiaires, que l'on fait avantageusement avec les transformées, on peut arriver aux expressions limites suivantes

$$\hat{k}(t) \simeq \frac{t}{m_1} + \frac{1}{2} - \frac{{}_0m_1}{m_1} + \frac{\sigma^2}{2 m_1^2} \quad \text{et}$$

$$\sigma_k^2(t) \simeq \frac{2}{m_1^3} \cdot t + \frac{1}{12} + \frac{{}_0\sigma^2}{m_1^2} - \frac{{}_0m_1 \cdot \sigma^2}{m_1^3} - \frac{2 \mu_3}{3 m_1^3} + \frac{5 \sigma^4}{4 m_1^4},$$

qui donnent la valeur moyenne et la variance du nombre k d'impulsions pour l'intervalle t . Ce résultat général, valable pour un processus de renouvellement du type modifié, peut être utilisé pour en déduire des relations se rapportant soit à un processus ordinaire (or), avec une impulsion à $t = 0$, soit à un processus stationnaire (st), où l'origine du temps est choisie au hasard.

Pour un processus ordinaire, puisque ${}_0f(t) = f(t)$, on trouve

$$\text{or } \hat{k}(t) \simeq \frac{t}{m_1} - \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2 m_1^2} \quad \text{et}$$

$$\text{or } \sigma_k^2(t) \simeq \frac{\sigma^2}{m_1^3} \cdot t + \frac{1}{12} + \frac{5 \sigma^4}{4 m_1^4} - \frac{2 \mu_3}{3 m_1^3}.$$

Pour un processus stationnaire on a

$${}_0f(t) = \frac{1}{m_1} \int_t^\infty f(x) dx,$$

d'où l'on déduit pour les moments

$${}_0m_1 = \frac{m_1^2 + \sigma^2}{2 m_1} \quad \text{et}$$

$${}_0\sigma^2 = \frac{1}{12 m_1^2} (m_1^4 + 6 m_1^2 \sigma^2 + 4 m_1 \mu_3 - 3 \sigma^4).$$

Par conséquent,

$$\text{st } \hat{k}(t) = \frac{t}{m_1} \quad \text{et}$$

$$\text{st } \sigma_k^2(t) \simeq \frac{\sigma^2}{m_1^3} \cdot t + \frac{1}{6} + \frac{\sigma^4}{2 m_1^4} - \frac{\mu_3}{3 m_1^3}.$$

Si l'on spécialise encore les conditions en admettant, par exemple, un processus original de Poisson perturbé par un temps mort, on retrouve en effet les résultats obtenus auparavant. Or, les avantages de la nouvelle approche ne sont pas seulement d'ordre esthétique : il s'agit bien d'une généralisation qui permet de décrire des situations où, par exemple, le temps mort ne correspond pas à un des types usuels et où le processus original n'est pas nécessairement Poissonien. Pour tous les détails on consultera le Rapport BIPM-77/1.

L'effet Gandy pour un temps mort cumulatif

Toute application de la méthode des coïncidences où les impulsions arrivant simultanément sur deux (ou plusieurs) voies sont détectées par un dispositif électronique à temps de résolution r , nécessite la subdivision du taux de comptage mesuré en une partie dite vraie et une autre dite fortuite. Pendant de longues années, cette séparation s'effectuait expérimentalement en insérant dans une des voies un retard suffisamment long pour n'avoir que des coïncidences fortuites. Par simple soustraction de cette contribution du taux de comptage total, on croyait pouvoir obtenir la partie recherchée, c'est-à-dire les coïncidences vraies.

Cependant, dans un travail publié déjà en 1961⁽¹⁾ A. Gandy avait indiqué la nature fallacieuse de ce raisonnement apparemment simple en montrant que le taux de comptage C_3 des coïncidences fortuites est lui-même fonction du retard δ . La valeur dont on a besoin à l'endroit $\delta = 0$ ne peut donc pas être mesurée ailleurs et il est nécessaire d'effectuer la correction exacte par le calcul.

La théorie de Gandy, qui était incomplète et pas toujours facile à suivre, a incité peu de gens à s'occuper plus en détail de ce problème. En général, on s'est contenté de s'assurer par des contrôles directs que le décalage effectif δ était suffisamment petit pour permettre l'utilisation de la valeur correspondant à $\delta = 0$. Ce n'est que récemment que l'on s'est aperçu que cette manière de contourner la difficulté, applicable dans la plupart des mesures d'activité, n'est plus permise dans les cas où le taux des coïncidences, mesuré en fonction du retard, est utilisé pour la détermination de la période de l'état intermédiaire (méthode des coïncidences retardées). Ici, il est nécessaire de tenir compte de la correction correspondante, au moins pour les cas où la période est de l'ordre des temps morts impliqués et en particulier pour des taux de comptage élevés.

Tandis que les résultats de Gandy, en raison des difficultés considérables de calcul, ne sont qu'approximatifs, il nous est apparu qu'une évaluation rigoureuse du taux des coïncidences fortuites en fonction du retard est possible et même facile si l'on admet que les temps morts insérés dans les deux voies sont du type cumulatif. Un calcul s'appuyant sur cette hypothèse a été fait récemment pour un processus original de Poisson*. En utilisant la notation introduite dans la figure 1 et en admettant, pour simplifier l'écriture $\tau_\beta = \tau_\gamma = \tau$ (temps morts égaux) et $r_\beta = r_\gamma = r$ (longueurs égales des impulsions bêta et gamma à l'entrée du mélangeur des coïncidences), on obtient après un calcul assez long, mais tout à fait élémentaire, pour les différents domaines du retard (supposé inséré dans la voie bêta), les expressions suivantes (si $\tau \geq 2r$)

(1) GANDY (A.), Mesure absolue de l'activité des radionucléides par la méthode des coïncidences bêta-gamma à l'aide de détecteurs de grande efficacité. Étude des coïncidences expérimentales, *Int. J. Appl. Rad. Isotopes*, 11, 1961, pp. 75-91.

* Voir Rapport WPN-207.

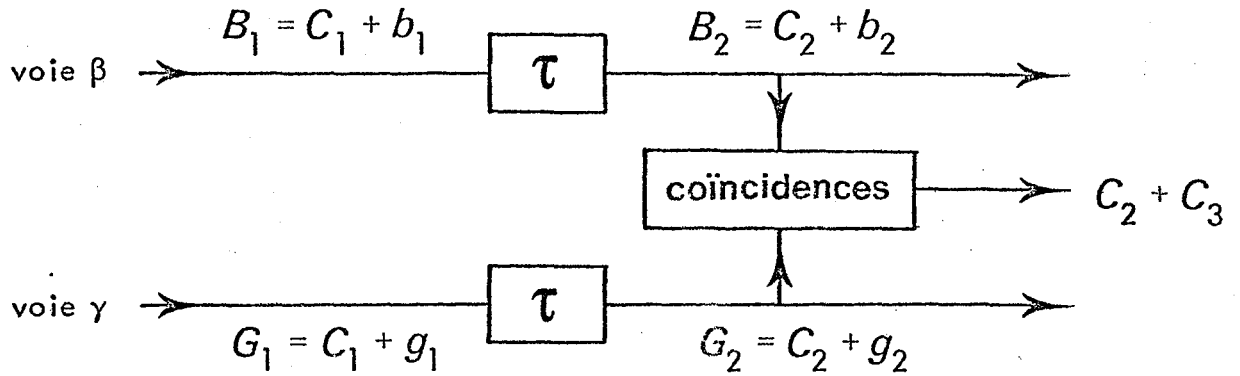


Fig. 1 .- Notation utilisée pour les taux de comptage.

C_1 et C_2 désignent les coïncidences vraies, C_3 les coïncidences fortuites. Pour une activité N_0 de la source et des efficacités ε_β et ε_γ des détecteurs respectifs, on a $B_1 = \varepsilon_\beta N_0$, $G_1 = \varepsilon_\gamma N_0$ et $C_1 = \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma N_0$. Les temps morts sont supposés égaux et cumulatifs.

- pour $|\delta| \leq r$:

$$C_3(\delta) = \frac{1}{C_1} \left\{ G_2 \tilde{b}_1 \left[1 - e^{-C_1(r+\delta)} \right] + B_2 \tilde{g}_1 \left[1 - e^{-C_1(r-\delta)} \right] \right\} ,$$

- pour $r \leq |\delta| \leq \tau - r$:

$$C_3(\delta) = \frac{1}{C_1} \left[\Delta_+ G_2 \tilde{b}_1 + \Delta_- B_2 \tilde{g}_1 \right] \cdot (e^{2C_1 r} - 1) \cdot e^{-C_1(r+|\delta|)} ,$$

- pour $\tau - r \leq |\delta| \leq \tau + r$:

$$C_3(\delta) = \frac{1}{C_1} (\Delta_+ G_2 \tilde{b}_1 + \Delta_- B_2 \tilde{g}_1) \cdot \left[e^{-C_1(|\delta|-r)} - e^{-C_1 \tau} \right] + B_2 G_2 (|\delta| + r - \tau) ,$$

- pour $|\delta| \geq \tau + r$:

$$C_3(\delta) = B_2 G_2 \cdot 2r ,$$

$$\text{où } \tilde{b}_1 = b_1 e^{-b_1 \tau}, \quad \tilde{g}_1 = g_1 e^{-g_1 \tau} \quad \text{et}$$

$$\Delta_{\pm} = U(\pm \delta), \text{ donc } \Delta_+ = 1 \text{ et } \Delta_- = 0 \text{ pour } \delta > 0, \\ \text{mais } \Delta_- = 1 \text{ et } \Delta_+ = 0 \text{ pour } \delta < 0.$$

Pour un cas spécifique (bien qu'extrême), le taux de comptage pour les coïncidences fortuites est représenté à la figure 2. Une simulation

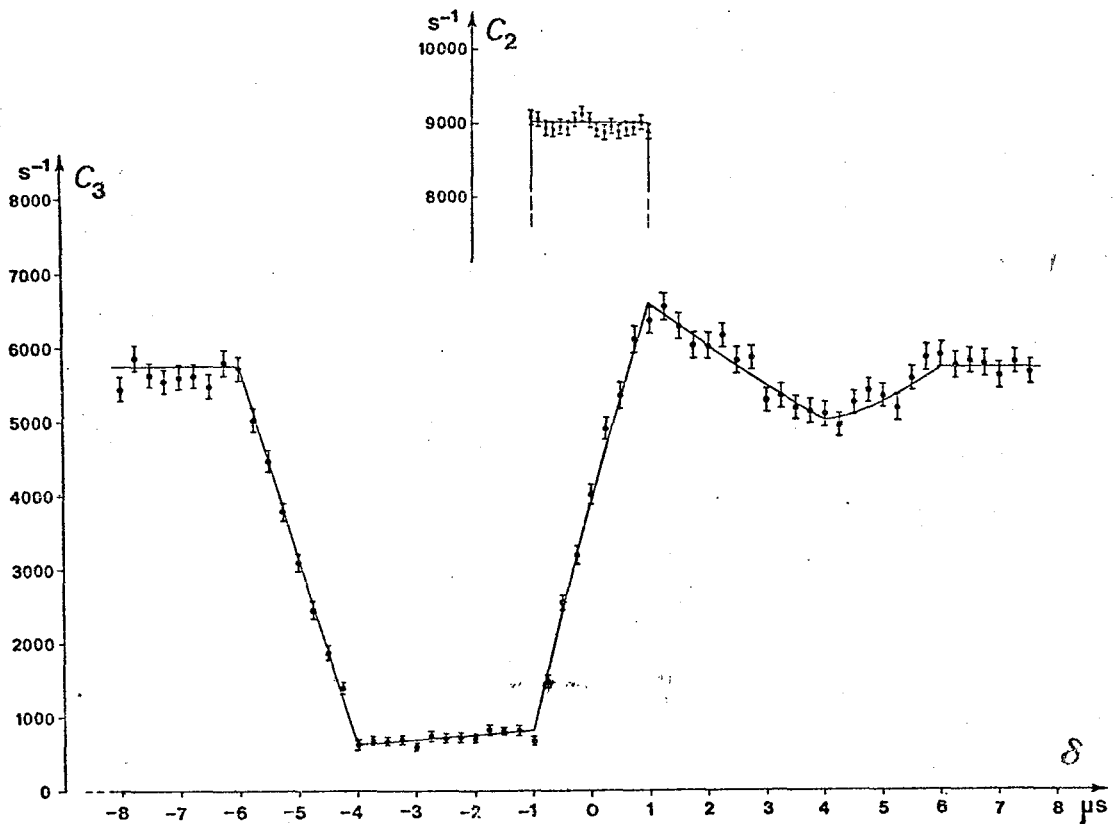


Fig. 2.- Représentation graphique de l'effet Gandy pour des temps morts cumulatifs.

C_2 et C_3 indiquent les taux de comptage pour les coïncidences vraies et fortuites, respectivement. Les valeurs des paramètres utilisés sont $N_0 = 500\,000\ s^{-1}$; $\epsilon_\beta = 0,9$, $\epsilon_\gamma = 0,2$; $\tau = 5\ \mu s$ et $r = 1\ \mu s$. La courbe est calculée et correspond aux formules indiquées dans le texte tandis que les points résultent d'une simulation par la méthode de Monte-Carlo.

directe du processus par la méthode de Monte-Carlo, faite pour les mêmes conditions, est également indiquée ; elle est en excellent accord avec la prévision théorique.

Le taux des coïncidences vraies, donné par

$$C_2 = C_1 e^{-(B_1 + G_1 - C_1)\tau},$$

reste invariable à l'intérieur du temps de résolution (c'est-à-dire pour $|\delta| < r$) et disparaît ailleurs ; sa valeur numérique est bien vérifiée par la même simulation.

Pour les mesures expérimentales, qui sont en préparation, on n'attend pas seulement un certain lissage de la courbe à cause du "time jitter", mais surtout des déformations qui seront dues aux effets d'empilement négligés dans ces considérations, mais dont on sera obligé de tenir compte dans une étape ultérieure.

Autres travaux

A part les travaux déjà mentionnés, on a fait, pour le cas d'une seule voie de comptage, une étude comparative sur la variance (Rapport BIPM-76/15) qui fait suite à une exploration semblable précédente sur la valeur moyenne. Il s'agit dans les deux cas des valeurs asymptotiques pour les divers processus de comptage. De façon préliminaire, on a également étudié l'influence de la décroissance d'une source radioactive sur la répartition des intervalles d'impulsions successives (Rapport BIPM-76/9).

Dans le domaine des coïncidences, quelques remarques critiques ont été faites sur les formules traditionnellement utilisées (Rapport BIPM-76/16). Pour un temps mort cumulatif, on a indiqué la dérivation d'expressions exactes pour les coïncidences vraies (Rapport BIPM-77/2), de même que pour les coïncidences fortuites (Rapport BIPM-77/3), dans les deux cas sans tenir compte d'un éventuel retard relatif.

Enfin, notre atelier d'électronique a construit un appareil (appelé convertisseur de vitesse) qui permet d'enregistrer la répartition dans le temps des différentes impulsions dont on dispose dans un ensemble à coïncidences. Cet appareil est décrit dans le Rapport BIPM-76/14. Les enregistrements seront également instructifs pour l'étude du comportement réel des circuits électroniques.

(Octobre 1977)