

Coïncidences fortuites pour un temps mort cumulatif

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

---

Il est sans doute assez surprenant de constater que l'évaluation du taux de comptage de coïncidences fortuites - problème considérable dans le cas d'un temps mort non cumulatif - est l'affaire de quelques lignes d'un calcul tout à fait élémentaire si ce temps mort est supposé du type cumulatif. Ceci, cependant, va de pair avec la situation que nous avons rencontrée récemment pour les coïncidences vraies (Rapport BIPM-77/2); on utilisera ici les mêmes notations qu'auparavant.

Pour les temps morts on admettra que  $\tau_\beta \leq \tau_\gamma$ ; pour pallier la situation contraire, il suffira d'échanger le rôle des bêtas et des gammas.

1. Evaluation du taux de comptage

Il s'avère pratique de traiter séparément les cas où la première impulsion donnant lieu à une coïncidence fortuite provient de la voie bêta ou de la voie gamma.

a) L'impulsion gamma précède le bêta

Partons d'une impulsion bêta enregistrée à  $t = 0$ .  $B_2$  désigne son type et son taux de comptage (Fig. 1). Il est pratique d'utiliser la variable  $x = -t$  pour la période qui précède l'arrivée de  $B_2$  (à  $x = 0$ ). La largeur des impulsions (supposées rectangulaires) est désignée respectivement par  $r_\beta$  et  $r_\gamma$ , et une coïncidence demande qu'elles se chevauchent.

Les impulsions gamma susceptibles de former une coïncidence fortuite doivent donc arriver à l'endroit  $x$ , avec  $0 < x < r_\gamma$ . On supposera comme d'habitude que  $\text{Max}(r_\beta, r_\gamma) < \tau_\beta$ . Le fait que  $B_2$  ait été enregistré permet de conclure à l'absence d'une coïncidence vraie  $C_1$  dans l'intervalle  $0 < x < \tau_\beta$ , observation qui est aussi valable pour la voie gamma. Il s'ensuit pour la densité de probabilité de trouver un partenaire sur la voie gamma (qui sera nécessairement du type  $g_1$ )

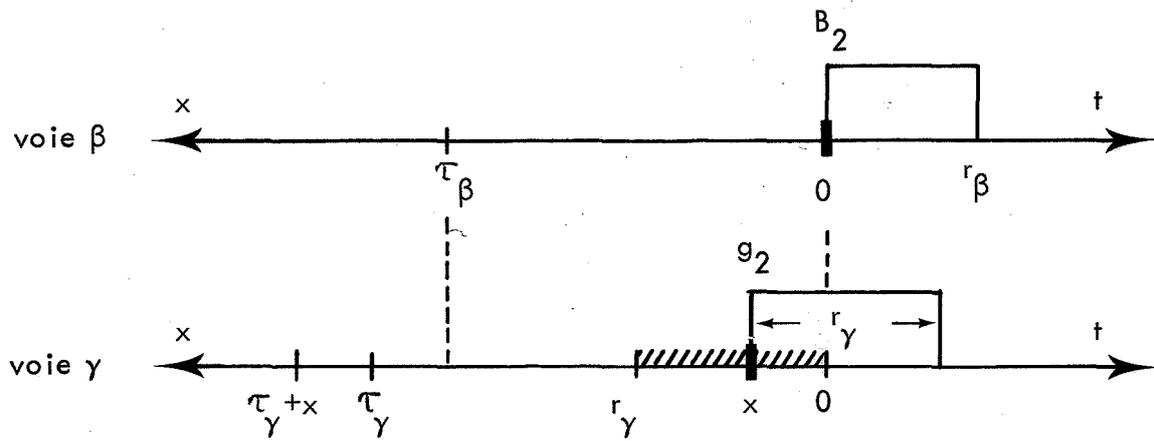


Fig. 1 - Situation schématique pour une coïncidence fortuite initiée par une impulsion gamma

$$\begin{aligned}
 w(G_2 \text{ à } x) &= p(g_1 \text{ à } x) \cdot P(\text{aucun } G_1 \text{ de } x \text{ à } \gamma+x) \\
 &= g_1 \cdot e^{-g_1 \tau_\gamma} \cdot e^{-C_1(x+\tau_\gamma-\tau_\beta)} \\
 &= g_1 \cdot e^{-G_1 \tau_\gamma + C_1 \tau_\beta} \cdot e^{-C_1 x} .
 \end{aligned} \tag{1}$$

On en déduit, pour la probabilité qu'une impulsion gamma arrive dans l'intervalle  $0 < x < r_\gamma$ ,

$$\begin{aligned}
 W(G_2 \text{ dans } r_\gamma) &= \int_0^{r_\gamma} w(G_2 \text{ à } x) dx \\
 &= g_1 \cdot e^{-G_1 \tau_\gamma + C_1 \tau_\beta} \cdot \frac{1}{C_1} (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) .
 \end{aligned} \tag{2}$$

Puisqu'un partenaire bêta se présente  $B_2$  fois par unité de temps, le taux de comptage pour les coïncidences fortuites initiées par une impulsion gamma s'évalue à

$$\gamma^\beta C_f = \frac{B_2 \cdot g_1}{C_1} \cdot e^{-g_1 \tau_\gamma} \cdot e^{-C_1 \vartheta} \cdot (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) , \tag{3}$$

où l'on a posé\*  $\tau_\gamma - \tau_\beta \equiv \vartheta \geq 0$ .

\* Cette quantité a été appelée auparavant  $\tilde{\tau}_\gamma$ .

b) L'impulsion bêta précède le gamma

Dans ce cas, la situation serait tout à fait analogue à celle décrite en a) - après remplacement de bêta par gamma et vice versa, donc par exemple  $B_2 \rightarrow G_2$ ,  $r_\gamma \rightarrow r_\beta$ , etc. - si l'on n'avait pas à respecter l'inégalité  $\tau_\beta \leq \tau_\gamma$ . Par conséquent, on ne s'attendra plus à une symétrie complète par rapport à bêta et gamma, sauf pour le cas où  $\tau_\beta = \tau_\gamma$ . A l'aide de la figure 2 on peut vérifier sans peine les relations qui suivent ( $y = -t$ ).

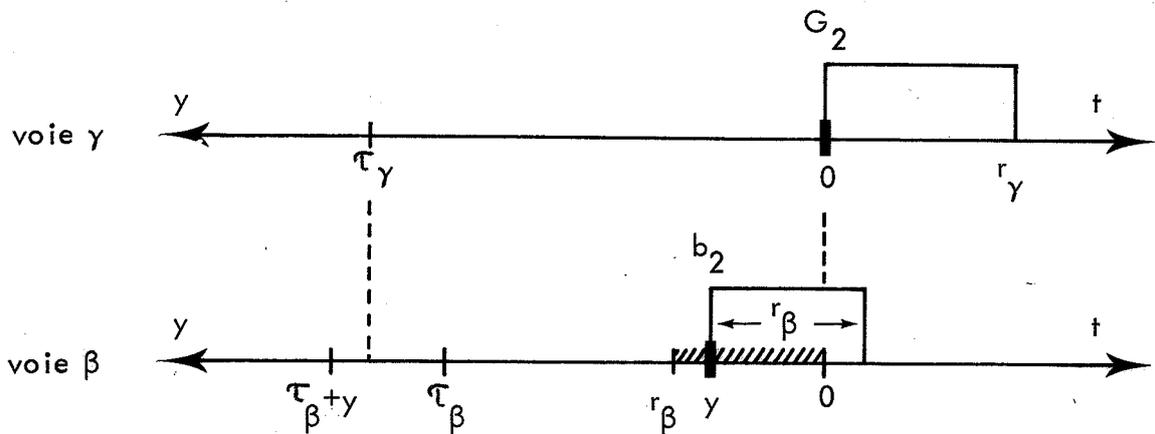


Fig. 2 - Commé Fig. 1, mais pour une coïncidence fortuite initiée par une impulsion bêta

La densité de probabilité de trouver un partenaire sur la voie bêta est

$$w(B_2 \text{ à } y) = p(b_1 \text{ à } y) \cdot P(\text{aucun } B_1 \text{ de } y \text{ à } \tau_\beta + y). \quad (4)$$

La forme du deuxième facteur dépend de la relation entre les temps morts, c'est-à-dire de  $\mathcal{V}$ . On trouve que

$$\begin{aligned} - \text{ pour } 0 \leq y \leq \mathcal{V} : & \quad P = e^{-b_1 \tau_\beta}, \\ - \text{ " } \mathcal{V} \leq y \leq r_\beta : & \quad P = e^{-b_1 \tau_\beta} \cdot e^{-C_1(y - \mathcal{V})}. \end{aligned} \quad (5)$$

La formule analogue à (1) se lit donc

$$w(B_2 \text{ à } y) = \begin{cases} b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} & \text{pour } y \leq \mathcal{V}, \\ b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \cdot e^{-C_1(y - \mathcal{V})} & \text{" } y \geq \mathcal{V}. \end{cases} \quad (6)$$

Il s'ensuit que

- pour  $r_\beta \leq \gamma$  :

$$W(B_2 \text{ dans } r_\beta) = b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \cdot r_\beta, \quad (7a)$$

- pour  $r_\beta \geq \gamma$  :

$$\begin{aligned} W(B_2 \text{ dans } r_\beta) &= b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \left[ \gamma + \int_{\gamma}^{r_\beta} e^{-C_1(y-\gamma)} dy \right] \\ &= b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \left[ \gamma + e^{C_1 \gamma} \cdot \frac{1}{C_1} (e^{-C_1 \gamma} - e^{-C_1 r_\beta}) \right]. \quad (7b) \end{aligned}$$

Cela nous amène, pour le taux des coïncidences fortuites dans lesquelles le bêta précède le gamma, à

$$\beta_\gamma C_f = G_2 \cdot b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \begin{cases} r_\beta & \text{pour } r_\beta \leq \gamma \\ \left[ \gamma + \frac{e^{C_1 \gamma}}{C_1} (e^{-C_1 \gamma} - e^{-C_1 r_\beta}) \right] & \text{" } r_\beta \geq \gamma. \end{cases} \quad (8)$$

## 2. Taux total des coïncidences fortuites et quelques cas particuliers

Le taux total des coïncidences fortuites est donné par la somme

$$C_f = \gamma_\beta C_f + \beta_\gamma C_f.$$

En insérant les contributions indiquées par les formules (3) et (8), on arrive, dans le cas de temps morts cumulatifs  $\tau_\beta \leq \tau_\gamma$ , à l'expression générale suivante

- pour  $r_\beta \leq \gamma$  :

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{B_2 \cdot g_1}{C_1} \cdot e^{-g_1 \tau_\gamma} \cdot e^{-C_1 \gamma} (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) \\ &\quad + G_2 \cdot b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \cdot r_\beta, \quad (9) \end{aligned}$$

- pour  $r_\beta \gg \nu^h$  :

$$C_f = \frac{B_2 \cdot g_1}{C_1} \cdot e^{-g_1 \tau_\gamma} \cdot e^{-C_1 \nu^h} (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) + G_2 \cdot b_1 \cdot e^{-b_1 \tau_\beta} \left\{ \nu^h + \frac{1}{C_1} \left[ 1 - e^{-C_1 (r_\beta - \nu^h)} \right] \right\}, \quad (10)$$

où  $\nu^h \equiv \tau_\gamma - \tau_\beta \geq 0$ .

Ce dernier résultat se simplifie beaucoup pour  $\tau_\beta = \tau_\gamma \equiv \tau$ , donc  $\nu^h = 0$ . On obtient alors

$$C_f = \frac{1}{C_1} \left[ B_2 \cdot g_1 \cdot e^{-g_1 \tau} (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) + G_2 \cdot b_1 \cdot e^{-b_1 \tau} (1 - e^{-C_1 r_\beta}) \right] = \frac{e^{-C_1 \tau}}{C_1} \left[ B_1 g_1 (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) + G_1 b_1 (1 - e^{-C_1 r_\beta}) \right] e^{-(b_1 + g_1) \tau}. \quad (11)$$

Pour  $r_\beta = r_\gamma \equiv r$ , on a finalement

$$C_f = \frac{e^{-C_1 \tau}}{C_1} (1 - e^{-C_1 r}) (B_1 g_1 + G_1 b_1) e^{-(b_1 + g_1) \tau}. \quad (11')$$

Quelques contrôles simples sont possibles en utilisant des cas spéciaux pour lesquels le résultat est facile à prévoir.

D'abord, on a évidemment toujours  $C_f = 0$  pour  $r_\beta = r_\gamma = 0$ . Etudions maintenant le cas limite  $C_1 \rightarrow 0$ , pour lequel les processus dans les deux voies sont indépendants l'un de l'autre. Puisque par exemple

$$\lim_{C_1 \rightarrow 0} \frac{1}{C_1} (1 - e^{-C_1 r_\gamma}) = r_\gamma,$$

on vérifie aisément que (9) et (10) conduisent, en effet, au résultat attendu

$$C_f = B_2 \cdot G_2 (r_\beta + r_\gamma), \quad \text{pour } C_1 = 0. \quad (12)$$

La quantité  $\tau_r = (r_\beta + r_\gamma)/2$  est connue sous le nom de temps de résolution du circuit à coïncidences.

Un autre cas limite correspond à  $B_1 = G_1 = C_1$ , d'où  $b_1 = g_1 = 0$ .  
Puisque  $b_1$  et  $g_1$  entrent sous forme de facteurs dans (9) et (10),  
il est évident que

$$C_f = 0, \quad \text{pour } B_1 = G_1 = C_1. \quad (13)$$

### 3. Remarque finale

On voit donc que les problèmes principaux qui se présentent sur le plan théorique à une mesure absolue d'activités par la méthode  $4\pi\beta-\gamma$ , c'est-à-dire le calcul du facteur de transmission  $T_c$  pour les coïncidences vraies (voir Rapport BIPM-77/2) et la détermination du taux des coïncidences fortuites, se résolvent aisément dans le cas d'un temps mort cumulatif. Aucune restriction n'est nécessaire pour les paramètres.

Dans l'application pratique des formules indiquées, on peut rencontrer quelques problèmes d'ordre numérique que nous aurons peut-être l'occasion de discuter plus tard.

(Mars 1977)

---