

Temps d'arrivée de la première impulsion provenant d'une source décroissante

Jörg W. Müller

Dans un processus de Poisson le taux moyen de comptage  $\varphi$  est stationnaire et ne dépend pas du temps. Or, pour des sources à vie très courte et pour de faibles efficacités d'enregistrement, cette approximation simple et pratique peut être insuffisante.

Dans ce qui suit, nous indiquons quelques premiers résultats qui essaient de tenir compte de la décroissance radioactive; une description plus complète est en préparation.

Pour une vie moyenne de la source de  $\lambda^{-1}$ , le taux de comptage décroît de façon exponentielle et l'on supposera que

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Déterminons d'abord la probabilité  $P(t)$  de n'observer aucune impulsion dans un intervalle de temps  $t$ . A cet effet, celui-ci est supposé subdivisé en  $n$  parties égales de durée  $\Delta t = t/n$ . En raison de l'indépendance des intervalles, on a

$$P_n(t) = \prod_{i=1}^n [1 - p(t_i)],$$

où  $p(t_i)$  désigne la probabilité d'observer une désintégration entre  $t = (i-1) \cdot \Delta t$  et  $i \cdot \Delta t$ ,

donc  $p(t_i) = \varphi(t_i) \cdot \Delta t$ .

Ceci nous amène à

$$P_n(t) = \prod_i \left[ 1 - \varphi_0 \cdot e^{-i\lambda t/n} \cdot \frac{t}{n} \right].$$

Pour évaluer ce produit on a avantage à passer aux logarithmes. Pour  $n \gg 1$  on peut écrire

$$\ln(1 - \varphi_0 \cdot e^{-i\lambda t/n} \cdot \frac{t}{n}) \cong -\varphi_0 \cdot e^{-i\lambda t/n} \cdot \frac{t}{n},$$

donc aussi

$$\begin{aligned} \ln P_n(t) &\cong -\frac{\rho_0 t}{n} \sum_{i=1}^n e^{-i \lambda t/n} \\ &= -\frac{\rho_0 t}{n} \left[ \frac{e^{-\lambda t/n} (1 - e^{-\lambda t})}{1 - e^{-\lambda t/n}} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour la limite  $n \gg 1$

$$\begin{aligned} \ln P(t) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln P_n(t)] \\ &= -\rho_0 t \cdot \lim \left[ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{n (1 - e^{-\lambda t/n})} \right] \\ &= -\rho_0 t \left[ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right]. \end{aligned}$$

L'original recherché est donc donné par

$$P(t) = \exp \left[ \frac{-\rho_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right].$$

Il s'ensuit que l'arrivée de la première impulsion est décrite par la densité

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= P(t) \cdot \varphi(t) \\ &= \exp \left[ -\rho_0 t \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) \right] \cdot \rho_0 e^{-\lambda t} \\ &= \rho_0 \cdot \exp \left\{ -t \left[ \rho_0 \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right) + \lambda \right] \right\}, \end{aligned}$$

qui généralise la forme exponentielle.

Si l'on se rappelle que le taux moyen de comptage pour un intervalle de temps  $t$  est

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \rho(t') dt' = \rho_0 \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \right),$$

cette densité s'écrit également sous la simple forme

$$f_{\lambda}(t) = f(t) \cdot e^{-\bar{p}(t) \cdot t},$$

qui montre bien la relation avec l'expression habituelle pour  $\lambda = 0$ .

Malheureusement, une discussion plus détaillée, par exemple à l'aide des moments, n'est pas aisée et se heurte encore à des difficultés mathématiques. Afin d'être tout de même en mesure de se former une idée sur l'importance des changements apportés par le souci de tenir compte de la décroissance, on se contentera d'une première approximation.

Pour  $\lambda t \ll 1$  on établit, par un développement en série, la forme approchée

$$f_{\lambda}(t) \cong f_0(t) \left[ 1 - \lambda t \left( 1 - \frac{\rho_0 t}{2} \right) \right].$$

On trouve alors pour les moments d'ordre  $k$ , définis par

$$M_k(t) = \int_0^{\infty} t^k \cdot f_{\lambda}(t) dt,$$

les valeurs approximatives

$$\begin{aligned} M_k(t) &\cong m_k(t) - \lambda \cdot m_{k+1}(t) + \frac{\rho_0 \lambda}{2} m_{k+2}(t) \\ &= m_k(t) \left[ 1 + \lambda \cdot \frac{k(k+1)}{2 \rho_0} \right], \end{aligned}$$

où  $m_k(t) = k! / \rho_0^k$  sont les moments d'une simple fonction exponentielle qui correspondent donc au cas  $\lambda = 0$ .

Il s'ensuit que

$$M_0(t) \cong 1,$$

$$M_1(t) \cong \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\lambda}{\rho_0} \right) \quad \text{et}$$

$$M_2(t) \cong \frac{2}{\rho_0^2} \left( 1 + \frac{3\lambda}{\rho_0} \right).$$

La première impulsion arrive donc après un intervalle dont la valeur moyenne est

$$\bar{t}_\lambda \cong \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\lambda}{\rho_0}\right)$$

et la variance

$$\sigma_t^2 \cong \frac{1}{\rho_0^2} \left(1 + \frac{4\lambda}{\rho_0}\right) .$$

Remarquons, pour finir, que l'approche heuristique que nous venons d'esquisser peut être justifiée par une étude des processus statistiques qui se déroulent à l'échelle microscopique.

(Octobre 1976)