P. Carré

Rapport BIPM-76/7

Typographie provisoire

Mesure des différences entre les fréquences de diverses radiations de lasers.

I.- Principes mathématiques du traitement par le programme CARES.

Ces principes vont être exposés en prenant comme exemple la comparaison de deux lasers à hélium-néon stabilisés au moyen de l'absorption saturée par l'iode 127.

On désigne par D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1 et J_1 les fréquences des composantes d, e, f, g, h, i et j pour le laser N° 1 et par D_2, E_2, F_2, G_2, H_2, I_2 et J_2 les fréquences des mêmes composantes pour le laser N° 2.

Chaque mesure est effectuée en sélectionnant une composante pour chaque laser et en déterminant la fréquence du battement réalisé au moyen de ces deux radiations. Cette fréquence est égale à la valeur absolue de la différence des fréquences des deux radiations. On en déduit cette différence elle-même si son signe est connu d'avance, ce qui est le cas si on choisit des composantes différentes pour les deux lasers; mais ce ne serait pas le cas si on choisissait la même composante. D'ailleurs, dans ce dernier cas, la mesure de la fréquence de battement présenterait des difficultés, notamment en raison de la modulation, nécessaire à l'asservissement, de la fréquence des deux radiations.

Équations de condition

Si on a effectué toutes les mesures possibles, on dispose du tableau de résultats suivant :

	$D_1-E_2=a_{12}$	$D_1-F_2=a_{13}$	$D_1-G_2=a_{14}$	$D_1-H_2=a_{15}$	$D_1-I_2=a_{16}$	$D_1-J_2=a_{17}$
$E_1-D_2=a_{21}$		$E_1-F_2=a_{23}$	$E_1-G_2=a_{24}$	$E_1-H_2=a_{25}$	$E_1-I_2=a_{26}$	$E_1-J_2=a_{27}$
$F_1-D_2=a_{31}$	$F_1-E_2=a_{32}$		$F_1-G_2=a_{34}$	$F_1-H_2=a_{35}$	$F_1-I_2=a_{36}$	$F_1-J_2=a_{37}$
$G_1-D_2=a_{41}$	$G_1-E_2=a_{42}$	$G_1-F_2=a_{43}$		$G_1-H_2=a_{45}$	$G_1-I_2=a_{46}$	$G_1-J_2=a_{47}$
$H_1-D_2=a_{51}$	$H_1-E_2=a_{52}$	$H_1-F_2=a_{53}$	$H_1-G_2=a_{54}$		$H_1-I_2=a_{56}$	$H_1-J_2=a_{57}$
$I_1-D_2=a_{61}$	$I_1-E_2=a_{62}$	$I_1-F_2=a_{63}$	$I_1-G_2=a_{64}$	$I_1-H_2=a_{65}$		$I_1-J_2=a_{67}$
$J_1-D_2=a_{71}$	$J_1-E_2=a_{72}$	$J_1-F_2=a_{73}$	$J_1-G_2=a_{74}$	$J_1-H_2=a_{75}$	$J_1-I_2=a_{76}$	

Il est évidemment impossible de déduire de ces équations les valeurs des fréquences des 14 composantes qui interviennent, mais cela devient possible si on admet que l'une quelconque d'entre elles, par exemple I_2, est connue.

Cela revient à dire que l'on prend comme inconnues :

$$d_1 = D_1 - I_2 \qquad d_2 = D_2 - I_2$$
$$e_1 = E_1 - I_2 \qquad e_2 = E_2 - I_2$$
$$f_1 = F_1 - I_2 \qquad f_2 = F_2 - I_2$$
$$g_1 = G_1 - I_2 \qquad g_2 = G_2 - I_2$$
$$h_1 = H_1 - I_2 \qquad h_2 = H_2 - I_2$$
$$i_1 = I_1 - I_2$$
$$j_1 = J_1 - I_2 \qquad j_2 = J_2 - I_2 \quad .$$

On obtient les 42 équations de condition suivantes :

	$d_1-e_2=a_{12}$	$d_1-f_2=a_{13}$	$d_1-g_2=a_{14}$	$d_1-h_2=a_{15}$	$d_1=a_{16}$	$d_1-j_2=a_{17}$
$e_1-d_2=a_{21}$		$e_1-f_2=a_{23}$	$e_1-g_2=a_{24}$	$e_1-h_2=a_{25}$	$e_1=a_{26}$	$e_1-j_2=a_{27}$
$f_1-d_2=a_{31}$	$f_1-e_2=a_{32}$		$f_1-g_2=a_{34}$	$f_1-h_2=a_{35}$	$f_1=a_{36}$	$f_1-j_2=a_{37}$
$g_1-d_2=a_{41}$	$g_1-e_2=a_{42}$	$g_1-f_2=a_{43}$		$g_1-h_2=a_{45}$	$g_1=a_{46}$	$g_1-j_2=a_{47}$
$h_1-d_2=a_{51}$	$h_1-e_2=a_{52}$	$h_1-f_2=a_{53}$	$h_1-g_2=a_{54}$		$h_1=a_{56}$	$h_1-j_2=a_{57}$
$i_1-d_2=a_{61}$	$i_1-e_2=a_{62}$	$i_1-f_2=a_{63}$	$i_1-g_2=a_{64}$	$i_1-h_2=a_{65}$		$i_1-j_2=a_{67}$
$j_1-d_2=a_{71}$	$j_1-e_2=a_{72}$	$j_1-f_2=a_{73}$	$j_1-g_2=a_{74}$	$j_1-h_2=a_{75}$	$j_1=a_{76}$	

qui peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$
\left[\begin{array}{ccccccc:cccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1\\
\hdashline
0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]
\times
\begin{bmatrix}
d_1\\ e_1\\ f_1\\ g_1\\ h_1\\ i_1\\ j_1\\ d_2\\ e_2\\ f_2\\ g_2\\ h_2\\ j_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{12}\\ a_{13}\\ a_{14}\\ a_{15}\\ a_{16}\\ a_{17}\\ a_{21}\\ a_{23}\\ a_{24}\\ a_{25}\\ a_{26}\\ a_{27}\\ a_{31}\\ a_{32}\\ a_{34}\\ a_{35}\\ a_{36}\\ a_{37}\\ a_{41}\\ a_{42}\\ a_{43}\\ a_{45}\\ a_{46}\\ a_{47}\\ a_{51}\\ a_{52}\\ a_{53}\\ a_{54}\\ a_{56}\\ a_{57}\\ a_{61}\\ a_{62}\\ a_{63}\\ a_{64}\\ a_{65}\\ a_{67}\\ a_{71}\\ a_{72}\\ a_{73}\\ a_{74}\\ a_{75}\\ a_{76}
\end{bmatrix}
$$

ou $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{a}$.

a est la matrice colonne des <u>valeurs observées</u> (42 lignes);
X est la matrice colonne des <u>inconnues</u> (13 lignes);
A est la matrice du schéma de comparaison (42 lignes, 13 colonnes).

Il s'agit de trouver les "meilleurs estimateurs" des 13 inconnues, c'est-à-dire ceux qui satisfont "au mieux" ouse 42 équations de condition

Equations normales

La méthode des <u>moindres carrés</u> nous fournit des estimateurs qui rendent minimale la somme des carrés des <u>écarts résiduels</u>:

$$\{a_{12}-(\hat{d}_1-\hat{e}_2)\}^2+\{a_{13}-(\hat{d}_1-\hat{f}_2)\}^2+\dots+\{a_{16}-\hat{d}_1\}^2+\{a_{17}-(\hat{d}_1-\hat{j}_2)\}^2$$
$$+\{a_{21}-(\hat{e}_1-\hat{d}_2)\}^2+\{a_{23}-(\hat{e}_1-\hat{f}_2)\}^2+\dots+\{a_{26}-\hat{e}_1\}^2+\{a_{27}-(\hat{e}_1-\hat{j}_2)\}^2$$
$$+\dots\dots+\{a_{71}-(\hat{j}_1-\hat{d}_2)\}^2+\{a_{72}-(\hat{j}_1-\hat{e}_2)\}+\dots+\{a_{76}-\hat{j}_1\}^2$$

Dans cette expression, $\hat{d}_1, \hat{e}_1, \hat{f}_1, \dots, \hat{d}_2, \dots, \hat{j}_2$ sont les estimateurs cherchés. Si on introduit la matrice colonne $\hat{\mathbf{X}}$ (13 lignes) dont ces estimateurs sont les éléments, ceux-ci sont les solutions d'un système d'équations linéaires, appelées <u>équations normales</u>, qui s'écrit:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{a},$$

soit :

$$\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{a} = \mathbf{S}$$

S est la matrice colonne (13 lignes) des seconds membres des équations normales,
M est la matrice (13 lignes et 13 colonnes, symétrique) des coefficients des premiers membres.

Dans notre exemple, nous avons :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6
\end{bmatrix}$$

Solution

Les comparaisons effectuées sont telles que la résolution du système linéaire soit possible. Cela revient à dire que la matrice **M** admet une inverse, $\mathbf{M}^{-1}$. On a alors :

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{A}^T\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{S}$$

On voit que, si on pose

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{A}^T,$$

alors $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \times \mathbf{a}$.

Pour un schéma de comparaison donné, la matrice **B** peut être calculée une fois pour toutes. On obtient la matrice colonne des estimateurs en faisant le produit de la matrice **B** par la matrice colonne **a** des obser-

vations.

En fait, les possibilités du programme utilisé ne se limitent pas à l'exemple donné ici de sorte que la matrice **M** peut changer d'une exécution à l'autre. On calcule donc son inverse à chaque exécution et on utilise la relation

$$\hat{X} = M^{-1} \times S$$ pour trouver les meilleurs estimateurs des inconnues.

Ecarts résiduels

A partir des estimateurs des inconnues, on détermine les "valeurs calculées" des observations, éléments de la matrice colonne (42 lignes dans notre exemple):

$$v = A \times \hat{X}$$

et les écarts résiduels, éléments de la matrice colonne (42 lignes):

$$r = a - v .$$

Cette relation peut être écrite, en introduisant la matrice unité **I** :

$$r = I \times a - A \times \hat{X} = I \times a - A \times B \times a = (I - A \times B) \times a = R \times a,$$

et on voit que, pour un schéma de comparaison donné, la matrice **R** pourrait être calculée a priori. En fait, cette méthode n'est pas utilisée, pour la raison donnée plus haut.

Ecart-type d'une mesure, variances et covariances des inconnues

Soient n le nombre d'équations de condition (42 dans notre exemple), p le nombre d'inconnues (13 dans notre exemple) et r_i ($i = 1$ à n) les écarts résiduels, la variance d'une mesure est :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}{n-p}$$, d'où on tire l'écart-type s.

En multipliant par s^2 tous les éléments de la matrice M^{-1}, on obtient les variances (termes diagonaux) et les covariances (termes non diagonaux) des inconnues.

II. - Principes mathématiques du traitement par le programme CACPL.

Nous reprenons le même exemple que dans le paragraphe I et nous adoptons les mêmes notations.

Equations de condition

Si on a effectué toutes les mesures possibles, le tableau des résultats est évidemment le même qu'à la page 1.

Pour le traitement, nous introduisons maintenant L_1, moyenne des fréquences des sept composantes D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1 et J_1, et de même L_2, moyenne des fréquences des sept composantes D_2, E_2, F_2, G_2, H_2, I_2 et J_2.

Nous posons : $\delta = L_1 - L_2$,

$d_1 = D_1 - L_1$, $h_1 = H_1 - L_1$, $d_2 = D_2 - L_2$, $h_2 = H_2 - L_2$,
$e_1 = E_1 - L_1$, $i_1 = I_1 - L_1$, $e_2 = E_2 - L_2$, $i_2 = I_2 - L_2$,
$f_1 = F_1 - L_1$, $j_1 = J_1 - L_1$, $f_2 = F_2 - L_2$, $j_2 = J_2 - L_2$.
$g_1 = G_1 - L_1$, $g_2 = G_2 - L_2$,

Nous pouvons alors réécrire les 42 équations de condition en faisant apparaître explicitement les inconnues $d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1, j_1, d_2, e_2, f_2, g_2, h_2, i_2, j_2$ et δ. Ainsi, $D_1 - E_2 = a_{12}$ s'écrit :

$$d_1 + I_1 - (e_2 + I_2) = a_{12},$$

ou $$d_1 - e_2 + I_1 - I_2 = a_{12},$$

soit $$d_1 - e_2 + \delta = a_{12}.$$

Sous forme matricielle, les 42 équations de condition sont :

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&-1&1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
d_1\\ e_1\\ f_1\\ g_1\\ h_1\\ i_1\\ j_1\\ d_2\\ e_2\\ f_2\\ g_2\\ h_2\\ i_2\\ j_2\\ \delta
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_{12}\\ a_{13}\\ a_{14}\\ a_{15}\\ a_{16}\\ a_{17}\\ a_{21}\\ a_{23}\\ a_{24}\\ a_{25}\\ a_{26}\\ a_{27}\\ a_{31}\\ a_{32}\\ a_{34}\\ a_{35}\\ a_{36}\\ a_{37}\\ a_{41}\\ a_{42}\\ a_{43}\\ a_{45}\\ a_{46}\\ a_{47}\\ a_{51}\\ a_{52}\\ a_{53}\\ a_{54}\\ a_{56}\\ a_{57}\\ a_{61}\\ a_{62}\\ a_{63}\\ a_{64}\\ a_{65}\\ a_{67}\\ a_{71}\\ a_{72}\\ a_{73}\\ a_{74}\\ a_{75}\\ a_{76}
\end{bmatrix}
\qquad (1)$$

ou $$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{a}.$$

$\mathbf{a}$ est la matrice colonne des <u>valeurs observées</u> (42 lignes) ;
$\mathbf{X}$ est la matrice colonne des <u>inconnues</u> (15 lignes) ;
$\mathbf{A}$ est la matrice du schéma de comparaison (42 lignes, 15 colonnes).

Entre les inconnues, il existe deux relations qui proviennent des définitions de I_1 et I_2. En effet :

$$7I_1 = D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + I_1 + J_1 ,$$

ou $(I_1 - D_1) + (I_1 - E_1) + (I_1 - F_1) + (I_1 - G_1) + (I_1 - H_1) + (I_1 - I_1) + (I_1 - J_1) = 0$

soit $d_1 + e_1 + f_1 + g_1 + h_1 + i_1 + j_1 = 0$

et, de même, $d_2 + e_2 + f_2 + g_2 + h_2 + i_2 + j_2 = 0$. (2)

Ces deux relations peuvent être écrites :

$$C \times X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

avec $$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il s'agit de trouver les "meilleurs estimateurs" des 15 inconnues, c'est-à-dire ceux qui satisfont "au mieux" aux 42 équations de condition (1) et rigoureusement aux deux relations (2).

Equations normales

La méthode des moindres carrés fournit des estimateurs $\hat{d}_1, \hat{e}_1, \hat{f}_1, \dots \hat{j}_1, \hat{d}_2, \dots \hat{j}_2$ et $\hat{\delta}$ qui rendent minimale la somme des carrés des écarts résiduels

$$\{a_{12} - (\hat{d}_1 - \hat{e}_2 + \hat{\delta})\}^2 + \dots + \dots + \{a_{76} - (\hat{d}_7 - \hat{e}_6 + \hat{\delta})\}^2 ,$$

et vérifient rigoureusement les relations (2).

Si on introduit la matrice colonne $\hat{X}$ (17 lignes) dont les éléments sont les 15 estimateurs ci-dessus et 2 inconnues auxiliaires λ_1 et λ_2 (le nombre des inconnues auxiliaires est égal au nombre de relations strictes entre les estimateurs), les éléments de $\hat{X}$ sont solutions d'un système d'équations linéaires (équations normales) qui s'écrit :

$$\left[\begin{array}{c|c} A^TA & C^T \\ \hline C & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right] \times \hat{X} = \left[\begin{array}{c} A^T a \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] . \qquad (3)$$

Posons $\left[\begin{array}{c|c} A^TA & C^T \\ \hline C & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right] = M$ (17 lignes et 17 colonnes) et introduisons la matrice A' (42 lignes, 17 colonnes) obtenue en bordant A (42 lignes, 15 colonnes) à droite de deux colonnes de zéros ; on a alors :

$$\left[\begin{array}{c} A^T a \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] = A'^T a .$$

Le système linéaire (3) s'écrit alors :

$$\underset{(17\times17)}{M} \times \underset{(17\times1)}{X} = \underset{(17\times42)}{A'^T} \underset{(42\times1)}{a} = \underset{(17\times1)}{S}$$

Dans notre exemple, nous avons :

$$M = \begin{bmatrix}
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 & 1 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & 42 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Solution

Les comparaisons effectuées sont telles que, compte tenu des relations imposées, la résolution du système (3) soit possible, ce qui revient à dire que M est inversible. On a alors :

$$\underset{(17\times1)}{\hat{X}} = \underset{(17\times17)}{M^{-1}} \times \underset{(17\times42)}{A'^T}\,\underset{(42\times1)}{a} = \underset{(17\times17)}{M^{-1}} \times \underset{(17\times1)}{S}$$

Cela peut être écrit $\underset{(17\times1)}{\hat{X}} = \underset{(17\times42)}{B} \times \underset{(42\times1)}{a}$, en posant $B = M^{-1} \times A'^T$.

La matrice M^{-1} est donnée à la page suivante, pour notre exemple.

La matrice B permet de trouver les estimateurs des inconnues directement à partir des observations. En fait, notre programme ne l'utilise pas. A chaque exécution, il compare la matrice A à la matrice correspondante de l'exécution précédente. Si elle est identique, le programme utilise la matrice M^{-1} précédemment calculée ; si elle est différente, il calcule M puis M^{-1} ; il fait ensuite le produit par cette matrice de la matrice colonne des seconds membres S, ce qui donne les estimateurs cherchés.

Ecarts résiduels

Les "valeurs" calculées des observations sont les éléments de la matrice colonne (42 lignes)

$$v = A' \times \hat{X}$$

et les écarts résiduels sont les éléments de la matrice colonne (42 lignes)

$$r = a - v$$

que l'on peut écrire $r = I \times a - A' \times \hat{X} = I \times a - A' \times B \times a = (I - A' \times B) \times a = R \times a$; on voit que R pourrait être calculée <u>a priori</u>, pour un schéma de comparaison donné

Ecart-type d'une mesure, variances et covariances des inconnues

Soient n le nombre d'équations de condition (42 dans notre exemple), p le nombre d'inconnues (15 dans notre exemple) et q le nombre de relations entre ces inconnues (2 dans notre exemple) ; soient r_i ($i = 1$ à n) les écarts résiduels la <u>variance d'une mesure</u> est :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i^2}{n - p + q}$$

, d'où on tire <u>l'écart-type d'une mesure</u> s.

En multipliant par s^2 tous les éléments de la matrice M^{-1}, on obtient les <u>variances</u> (termes diagonaux) et les <u>covariances</u> (termes non diagonaux) des inconnues.

On voit en particulier, dans notre exemple, que les variances des 14 inconnues $d_1, e_1, f_1, \ldots, j_1, d_2, e_2, \ldots j_2$ sont égales. L'écart-type avec lequel ces inconnues sont déterminées est

$$\sigma = s\sqrt{\frac{216}{1470}} = \frac{6}{7}\cdot\frac{s}{\sqrt{5}}.$$

La différence δ entre les fréquences moyennes des deux lasers est déterminée avec l'écart-type

$$\sigma_\delta = s\sqrt{\frac{35}{1470}} = \frac{s}{\sqrt{42}}.$$

Sèvres,
10 mai 1976 (partie I);
8 juillet 1976 (partie II).

$$M^{-1} = \frac{1}{1470} \times \begin{array}{cccccccccccccc}
216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 210 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 210
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & 6 & -36 & 6 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
6 & 6 & 6 & -36 & 6 & 6 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
6 & 6 & -36 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
6 & -36 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & 6 & 6 & 6 & -36 & 6 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & 6 & 6 & -36 & 6 & 6 & 0 & 0 \\
-36 & -36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & 6 & -36 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\
-36 & 216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\
216 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & -36 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0
\end{array}$$