

Faisceaux gaussiens et interférométrie

P. Giacomo

(Exposé du 13 avril 1976, au BIPM)

La majeure partie de cet exposé est tirée d'un article de H. Kogelnik et T. Li (*Applied Optics*, 5, 1966, pp. 1550-1567). Il y sera tout au long question de faisceaux "gaussiens" qui méritent quelques explications préliminaires.

On considérera des ondes électromagnétiques monochromatiques, de fréquence f , de pulsation $\omega = 2 \pi f$, ayant (sauf avis contraire) la symétrie de révolution autour de l'axe Oz et se propageant vers les z croissants. Les angles avec l'axe Oz seront petits (conditions de Gauss de l'optique géométrique).

En optique géométrique, on considère habituellement des ondes planes ou sphériques avec une distribution d'amplitude uniforme : le module de l'amplitude complexe u du champ électrique (ou magnétique) de l'onde est le même en tous les points d'une même surface d'onde.

Nous considérons ici des ondes présentant une distribution non uniforme particulière. Pour un point situé à la distance r de l'axe Oz , dans un plan d'abscisse z , le module de l'amplitude complexe dépend de r suivant une fonction de Gauss. (Fig. 1) :

$$|u| = u_0 \exp(-r^2/w^2),$$

d'où le nom de "distribution gaussienne" d'amplitude ; u_0 et w sont indépendants de r ; u_0 n'est autre que $|u|$ pour $r = 0$; on appelle souvent w le "rayon caractéristique" ou le "rayon" du faisceau : c'est le rayon pour lequel

$$|u| = u_0/e \approx 0,37 u_0.$$

La densité d'énergie est proportionnelle au carré du champ électrique (ou magnétique)

$$|u^2| = u_0^2 \exp(-2 r^2/w^2) ;$$

elle est donc aussi distribuée suivant une fonction de Gauss ;

$$\text{pour } r = w, |u^2| = u_0^2/e^2 \approx 0,14 u_0^2,$$

la densité d'énergie devient donc très petite (par rapport à la densité sur l'axe Oz) dès que $r > w$.

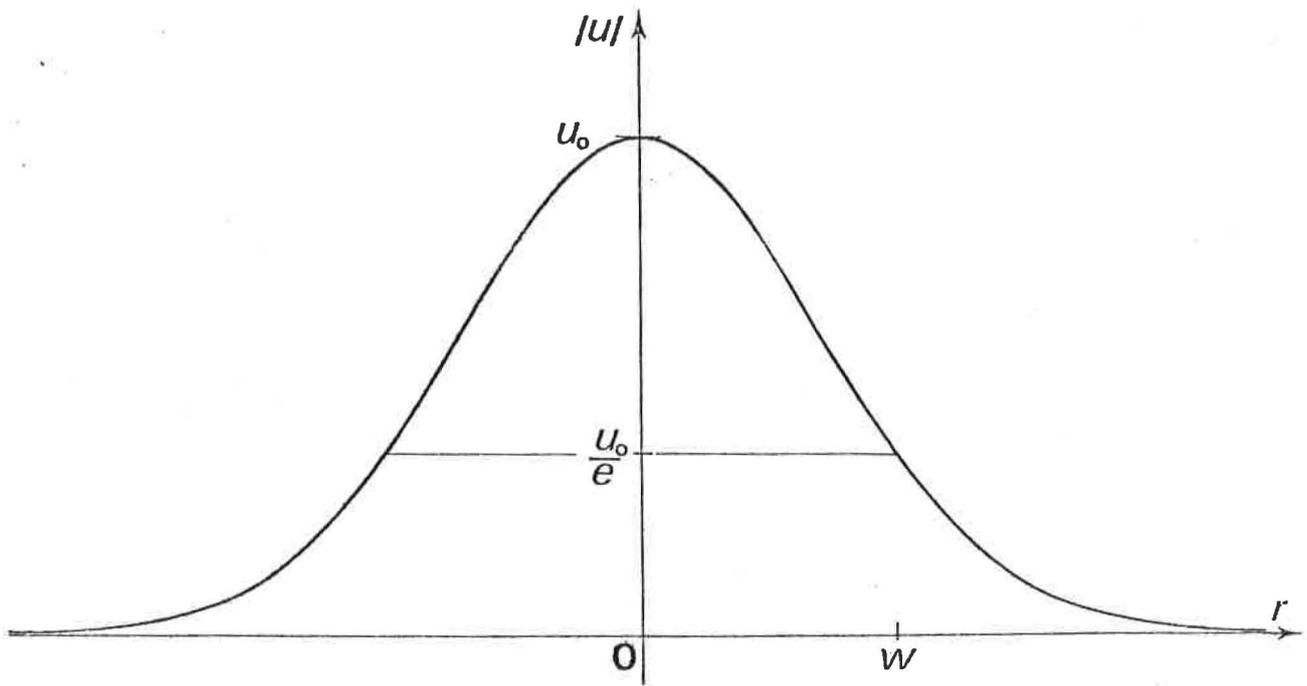


Figure 1.- Distribution de l'amplitude (en module) en fonction de la distance à l'axe r , sur une surface d'onde à distribution gaussienne.

I. Pourquoi les faisceaux gaussiens ?

I. 1 - Quelques-unes de leurs propriétés ont été signalées vers 1950, à l'occasion de recherches sur l'"apodisation" (diminution des "pieds" des figures de diffraction).

Une onde plane de distribution uniforme, limitée par un diaphragme circulaire de rayon R , donne dans le plan focal image d'un objectif non pas une image ponctuelle mais une figure de diffraction bien connue.

Si, à l'aide d'un filtre convenable, on substitue à la distribution uniforme sur l'objectif une distribution de Gauss, on obtient dans le plan focal une autre distribution de Gauss, dont les pieds éloignés sont plus faibles que ceux de la figure de diffraction classique. On sait en effet que les distributions sur l'objectif et dans le plan focal sont liées par une transformation de Fourier, qui transforme une fonction de Gauss en une autre fonction de Gauss.

On doit en toute rigueur tenir compte de la limitation par le bord du diaphragme ($|u| = 0$ pour $r > R$) ; on doit donc prendre, sur l'objectif, une distribution de Gauss avec $w \ll R$ pour que la limitation par le diaphragme modifie très peu la distribution d'éclairement dans le plan focal ; par rapport à la diffraction classique, la partie centrale de l'image est élargie dans un rapport $\approx R/w$, mais les pieds éloignés sont quand même plus faibles.

I. 2 - Les faisceaux gaussiens apparaissent comme solutions d'un problème beaucoup plus général. Recherchons des solutions de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques qui correspondraient à des ondes quasi-planes, d'axe de propagation Oz .

Une onde plane, pour la variable s (qui peut être le champ électrique ou le champ magnétique de l'onde) est représentée par

$$s = s_0 \exp [j (\omega t - kz)]$$

$$\text{où } k = 2 \pi / \lambda = \omega / c = 2 \pi f / c,$$

avec c = vitesse de propagation des ondes planes de fréquence f , de pulsation ω , de longueur d'onde λ dans le milieu considéré ; k est souvent appelé constante de propagation, ou vecteur d'onde.

Le facteur $\exp (j\omega t)$ apparaît partout en facteur, ce qui permet de ne pas l'écrire et de ne s'occuper que de l'amplitude complexe $u = s_0 \exp (-jkz)$.

Une onde quasi-plane peut être représentée par son amplitude complexe $u = \Psi \exp (-jkz)$ où Ψ est une fonction complexe, lentement variable, des coordonnées x, y, z (ou des coordonnées cylindriques z, r, ϕ).

La fonction u doit obéir à l'équation de propagation :
 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$.

I. 2 - 1 - On trouve une solution relativement simple, appelée mode fondamental gaussien de propagation, de la forme :

$$\Psi = u_0 \frac{W_0}{W} \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} + j\Phi - jk \frac{r^2}{2R} \right) \quad (1)$$

où les paramètres réels W , Φ et R , qui correspondent chacun à une propriété simple de l'onde, s'expriment tous en fonction de z et du seul paramètre arbitraire W_0 , réel, positif, indépendant de r .

Il s'agit d'une onde gaussienne :

$$\left| \frac{u(r)}{u(0)} \right| = \exp \left(-\frac{r^2}{W^2} \right), \text{ de rayon caractéristique } W, \\ \text{avec } W^2 = W_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2} \right)^2 \right] \quad (2)$$

W_0 , seul paramètre arbitraire, est le rayon caractéristique de l'onde pour $z = 0$; c'est aussi la valeur minimale de W ; le faisceau présente donc un "col" et W_0 est le rayon caractéristique de ce col (waist en anglais = taille).

Le facteur W_0/W traduit la décroissance de l'amplitude lorsque le diamètre de l'onde croît (conservation de l'énergie).

Les termes imaginaires représentent les écarts de phase de l'onde par rapport à l'onde plane :

le terme $-jkr^2/2R$ traduit la courbure de l'onde, avec un rayon de courbure

$$R = z \left[1 + \left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (3)$$

on notera la relation utile obtenue en divisant (2) par (3) :

$$W^2/R = \left(\frac{\lambda}{\pi W_0} \right)^2 z \quad (4)$$

$$\text{le terme } j\Phi, \text{ avec } \text{tg}\Phi = \frac{\lambda z}{\pi W_0^2} \quad (5)$$

traduit l'écart de phase entre l'onde gaussienne et l'onde plane, sur l'axe Oz ($\Phi > 0$ correspond à une avance de phase).

I. 2 - 2 - On trouve en fait toute une famille de solutions de la même forme dépendant de deux entiers, m et n (ou q et l).

Si l'on recherche les solutions symétriques (ou antisymétriques) par rapport à Ox et Oy , on trouve

$$\Psi = h_m(x/W) h_n(y/W) \Psi_{mn}$$

où h_m , h_n sont des polynômes réels de degré m et n (polynômes de Hermite) dont les coefficients ne dépendent que des entiers m et n et Ψ_{mn} prend la même forme que ci-dessus, à ceci près que

$$\text{tg} [\Phi_{mn}/(m + n + 1)] = \frac{\lambda z}{\pi W_0^2}$$

Si l'on recherche les solutions ayant des symétries axiales autour de Oz , on trouve encore

$$\Psi = g_{ql}\left(\frac{r}{W}\right) h_l(\phi) \Psi_{ql}$$

avec g_{ql} = polynôme réel de degré $2q + l$

$h_l(\phi)$ = fonction sinusoïdale de $l\phi$; les coefficients de g_{ql} et h_l ne dépendent ici encore que des entiers q et l , et Ψ_{ql} prend toujours la même forme, à ceci près que

$$\text{tg} [\Phi_{ql}/(2q + l + 1)] = \frac{\lambda z}{\pi W_0^2}$$

On voit que ces solutions (dites modes transverses ordre m , n ou d'ordre q , l) sont très analogues au mode fondamental, au facteur multiplicatif $h_m h_n$ ou $g_{ql} h_l$ près, qui module la distribution d'amplitude de façon comparable quel que soit z (en prenant les coordonnées réduites x/W et y/W ou r/W et ϕ) ; on retrouve la même distribution gaussienne

$\exp(-\frac{r^2}{W^2})$, la même courbure des surfaces d'onde, et un écart de phase Φ sur l'axe multiplié par $m + n + 1$ ou $2q + l + 1$.

Notons que le mode fondamental est simplement le mode transverse correspondant à $m = n = 0$, ou $q = l = 0$.

I. 2 - 3 - Les solutions ci-dessus forment un ensemble complet de fonctions orthogonales ; toute onde peut être décomposée en une somme d'ondes gaussiennes.

Nous nous limiterons dans la suite au mode fondamental, mais la majorité des résultats s'étend sans difficulté aux autres modes.

I.3 - Si on recherche les "ondes stationnaires" possibles dans une cavité laser, c'est-à-dire celles qui correspondront à des résonances de la cavité, donc à des oscillations entretenues si la cavité contient un milieu capable d'amplifier les ondes en question, on trouve des ondes

gaussiennes avec des conditions de résonance.

I. 3 - 1 - Ordre d'interférence. Pour des ondes planes, dans un Fabry-Perot par exemple, d'épaisseur L , on a la condition de résonance :

$$L = p\lambda/2 \quad \text{ou} \quad 2kL = 2\pi p \quad \text{avec } p \text{ entier.}$$

Ici, on a la condition

$$2kL - 2\Delta\phi = 2\pi p \quad \text{ou} \quad f = \frac{c}{2L} \left(p + \frac{2\Delta\phi}{2\pi} \right)$$

puisque'on doit tenir compte de la variation $\Delta\phi$ de ϕ en fonction de z sur la longueur L de la cavité; si les réflexions aux extrémités se font avec les avances de phase ϕ_1 et ϕ_2 , on doit aussi en tenir compte et la condition devient

$$2kL - 2\Delta\phi - \phi_1 - \phi_2 = 2\pi p.$$

I. 3 - 2 - En outre le rayon de courbure R des surfaces d'onde et la position du col ($W = W_0$) s'adaptent de telle façon que $R =$ rayon de courbure du miroir à chaque extrémité; d'où une limitation aux valeurs possibles de ces rayons de courbure des miroirs en fonction de la longueur L : on ne peut pas, par exemple, constituer une cavité avec deux miroirs convexes ou de rayon de courbure $|R| < L/2$.

I. 3 - 3 - Pour une même cavité laser, on peut avoir plusieurs modes fondamentaux correspondant aux diverses valeurs de l'entier p ; on les appelle habituellement modes longitudinaux. On peut aussi avoir des modes transverses (m, n ou q, l). Ils correspondent aux mêmes rayons de courbure, à la même position du col, au même W_0 , mais généralement à des fréquences d'oscillation différentes, puisque

$$f = \left[p + (2\Delta\phi / 2\pi) \right] c / 2L \quad \text{et que } \Delta\phi \text{ est fonction de } m, n \text{ (ou } q, l).$$

Les modes transverses correspondent en général à des pertes d'énergie (par diffraction) plus élevées; ils sont moins facilement excités. Pour faciliter l'oscillation sur le mode fondamental seul, on ajoute quelquefois dans la cavité des diaphragmes qui accentuent davantage les pertes des modes d'ordre supérieur.

Dans tous les cas, le faisceau émis par un laser correspond à un faisceau gaussien (ou à une superposition de faisceaux gaussiens), d'où l'importance de ces faisceaux.

... /

II. Propriétés remarquables d'un faisceau gaussien

II. 1 - En dehors de la longueur d'onde λ (ou de la fréquence f), on décrit toutes les propriétés d'un faisceau gaussien à l'aide d'un seul paramètre : W_0 (on utilise parfois le paramètre

$\frac{2\pi W_0^2}{\lambda} = b$ que l'on appelle paramètre confocal). Notons que

la longueur d'onde λ qui apparaît dans les relations déjà écrites est celle qu'aurait une onde plane infinie dans le milieu considéré.

Notons également que l'origine des z est supposée prise au col du faisceau, et la direction Oz suivant l'axe de symétrie du faisceau. En toute rigueur, pour caractériser complètement un faisceau gaussien, on doit spécifier l'axe Oz , la position et le rayon W_0 du col (et éventuellement les entiers m et n ou q et l s'il s'agit de modes transverses).

A part le sens de propagation, toujours vers les z croissants, les propriétés du faisceau traduites par les relations (1), (2), (3), (5), telles que courbure des surfaces d'onde, rayon caractéristique, densité d'énergie, etc., sont les mêmes ou changent seulement de signe lorsqu'on change z en $-z$.

II. 2 - Col du faisceau

En $z = 0$, W prend sa valeur minimale égale à W_0 , la distribution d'amplitude est gaussienne :

$$|u| = u_0 \exp(-r^2/W_0^2),$$

la surface d'onde est plane ($1/R = 0$) ; la densité d'énergie est distribuée comme

$$|u|^2 = u_0^2 \exp(-2r^2/W_0^2)$$

le rapport du flux énergétique ϕ_s qui passe à l'intérieur d'un cercle de rayon s au flux total ϕ_t est

$$\phi_s/\phi_t = \frac{u_0^2 \int_0^s \exp(-2r^2/W_0^2) \cdot 2\pi r dr}{u_0^2 \int_0^\infty \exp(-2r^2/W_0^2) \cdot 2\pi r dr}$$

$$= 1 - \exp(-2s^2/W_0^2) ;$$

... /

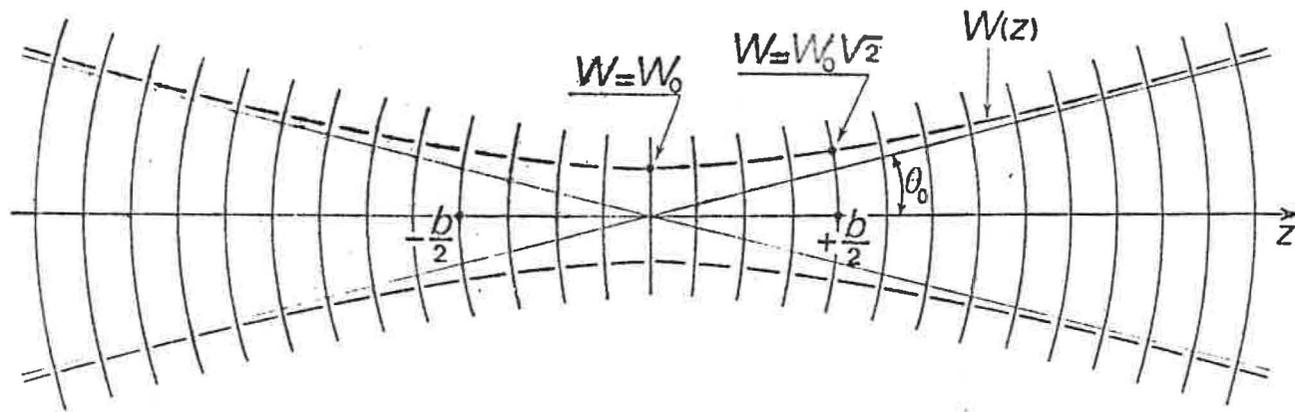


Figure 2.- Faisceau gaussien d'axe Oz ; section méridienne des surfaces d'onde au voisinage du col. D'après la relation $\theta_0 W_0 = \lambda/\pi$, l'échelle de la figure correspondrait sensiblement à $\lambda = W_0$.

à l'intérieur du cercle de rayon $s = W_0$ on trouve donc la fraction $1 - \exp(-2) \approx 0,86$ du flux total.

NB.- A l'abscisse z , on trouve de même

$$\phi_s/\phi_t = 1 - \exp(-2 s^2/W^2),$$

et 86 % du flux total à l'intérieur de $s = W$.

II. 3 - Divergence du faisceau

Lorsque $z \rightarrow \infty$, $W \rightarrow \infty$. D'après (2) qui s'écrit aussi $W^2 = W_0^2 + \left(\frac{\lambda z}{\pi W_0}\right)^2$, on voit que $W(z)$ est hyperbolique, avec des asymptotes correspondant à la limite de

$$W/z \text{ pour } z \rightarrow \infty : W/z \rightarrow \theta_0 = \pm \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

L'ouverture angulaire θ_0 , correspondant au rayon caractéristique W , permet de caractériser la divergence du faisceau.

On voit tout de suite que $\theta_0 W_0 = \pm \frac{\lambda}{\pi}$ est indépendant du faisceau particulier considéré.

L'étendue géométrique $\pi \theta_0^2 \cdot \pi W_0^2 = \pi \lambda^2$, que l'on peut considérer conventionnellement comme l'"étendue caractéristique" du faisceau, ne dépend que de la longueur d'onde émise et non de la géométrie de la cavité. Pour tous les lasers émettant la même longueur d'onde, on aura, suivant la cavité, un faisceau large et peu divergent, ou un faisceau étroit (au niveau du col) et divergent, mais toujours la même étendue caractéristique, même pour les modes transverses.

II. 4 - Courbure des surfaces d'onde

D'après (3), R a le même signe que z , ce qui correspond à des surfaces d'onde dont la concavité est tournée vers $z = 0$.

Toujours d'après (3), $|R|$ est minimal pour $z = \pm \pi W_0^2/\lambda = \pm b/2$, avec $|R|$ minimal = $2 \pi W_0^2/\lambda = b$, et d'après (2) $W^2 = 2 W_0^2$. Les deux surfaces d'onde en $z = + b/2$ et $z = - b/2$ sont donc confocales, d'où le nom de paramètre confocal donné à b : c'est la longueur de la cavité laser à miroirs confocaux qui donnerait naissance au faisceau considéré.

L'abscisse du centre de courbure des surfaces d'onde est $\delta = z - R = - (\pi W_0^2 / \lambda)^2 / z$ (d'après (3)) ; δ est toujours de signe contraire à z : le centre de courbure est toujours au-delà du col (par rapport à la surface d'onde) et il s'en éloigne d'autant plus que la surface d'onde est plus proche du col.

II. 5 - Tout système optique (stigmatique) transforme un faisceau gaussien en un autre faisceau gaussien

Montrons-le pour une lentille mince (suffisamment ouverte pour ne pas limiter les faisceaux).

Immédiatement à gauche de la lentille, on a une surface d'onde gaussienne incidente de rayon de courbure R_1 et de rayon caractéristique W_1 , donnés par les relations (2) et (3) où $z = z_1$ est l'abscisse de la lentille par rapport au col du faisceau incident.

Immédiatement à droite de la lentille, on a la même distribution gaussienne d'amplitude, avec un rayon caractéristique $W_1' = W_1$, et un nouveau rayon de courbure R_1' (que l'on calcule, d'après l'optique géométrique à partir de R_1 et de la convergence de la lentille).

R_1' et W_1' correspondent à une solution de l'équation de propagation suivant un mode identique à celui du faisceau incident, mais avec un paramètre W_0' et une position du col différents.

On peut calculer simplement la position et le rayon W_0' du col "à droite" de la lentille. On écrit les relations correspondant à (2) et (3) immédiatement à droite de la lentille, l'abscisse $z' = z_1'$ étant prise à partir du col, pour l'instant inconnu, du faisceau émergent :

$$W_1'^2 = W_0'^2 \left[1 + (\lambda z_1' / \pi W_0'^2)^2 \right]$$

$$R_1' = z_1' \left[1 + (\pi W_0'^2 / \lambda z_1')^2 \right]$$

en utilisant la relation analogue à (4), on en tire :

$$\lambda z_1' / \pi W_0'^2 = \pi W_1'^2 / \lambda R_1' \quad (6)$$

d'où

$$z_1' = R_1' / \left[1 + (\lambda R_1' / \pi W_1'^2)^2 \right] \quad (7)$$

$$W_0'^2 = W_1'^2 / \left[1 + (\pi W_1'^2 / \lambda R_1')^2 \right] \quad (8)$$

z'_1 est l'abscisse de la lentille par rapport au col du faisceau émergent ; inversement ce col se trouve à la distance $-z'_1$ de la lentille ; sa position et son rayon W'_0 sont donc déterminés.

Ce mode de raisonnement s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de lentilles minces ; on l'étendrait aussi, si nécessaire, à tout système optique épais stigmatique.

Notons que l'étendue géométrique caractéristique égale à $\pi\lambda^2$, est a priori conservée dans ces transformations optiques.

II. 6 - Relations entre faisceau gaussien "objet" et faisceau gaussien "image" dans le cas d'une lentille mince.

Ce point mérite quelque attention, les relations de l'optique géométrique n'étant plus applicables en général.

II. 6 - 1 - Les centres de courbure des surfaces d'onde immédiatement à gauche et immédiatement à droite de la lentille sont conjugués l'un de l'autre au sens de l'optique géométrique. Par contre, le col "à gauche" et le col "à droite" ne sont pas conjugués. Cela est évident si les deux cols sont réels, puisqu'ils sont tous les deux plus proches de la lentille que les centres de courbure ; c'est encore vrai dans le cas général.

II. 6 - 2 - L'image géométrique du col objet n'est pratiquement confondue avec le col du faisceau image que si les rayons de courbure des surfaces d'onde sont suffisamment petits à gauche et à droite de la lentille, plus précisément si, dans l'équation (7) et son homologue écrite à gauche de la lentille,

$$|\lambda R'_1 / \pi W_1'^2| \ll 1 \quad \text{et} \quad |\lambda R_1 / \pi W_1^2| \ll 1 \quad (9)$$

conditions nécessaires pour que $z' \approx R'_1$ et $z \approx R_1$; d'après (6) et (8) et leurs homologues écrites à gauche de la lentille, les conditions (9) sont équivalentes à

$$|z'_1| \gg b' \quad \text{et} \quad |z_1| \gg b, \quad \text{ou à}$$

$$W_1' \gg W'_0 \quad \text{et} \quad W_1 \gg W_0.$$

On vérifiera qu'on a alors conjugaison approchée non seulement en position mais aussi en grandeur puisque, d'après (8) et $W_1' = W_1$,

$$W'_0 / W_0 \approx |R'_1 / R_1| \approx |z'_1 / z_1|.$$

.../

II. 6 - 3 - Si on a un faisceau objet de col W_0 très large, donc de divergence très faible et de grand paramètre confocal b , les surfaces d'onde sont pratiquement planes dans une région étendue autour de $z = 0$. Si un tel faisceau objet a son col au voisinage de la lentille mince

($W_1 = W'_1 \approx W_0$), le rayon de courbure R'_1 des ondes émergentes, au voisinage de la lentille, est pratiquement égal à la distance focale f de la lentille ; si en outre cette distance focale est petite par rapport au paramètre b ,

$$\lambda R'_1 / \pi W_1'^2 \approx \lambda R'_1 / \pi W_0^2 \approx \lambda f / \pi W_0^2 \ll 1$$

entraîne d'après (7) $z'_1 \approx R'_1 \approx f$ et le col image est au voisinage du foyer image de la lentille.

Notons que, d'après (8), $W'_0 \approx \lambda R'_1 / \pi W_1' \approx \lambda f / \pi W_0 = \theta_0 f$ le col image est donc en fait l'image, non pas du col objet, mais des points à l'infini du faisceau objet.

Quelle que soit la position du col objet, on peut tenir un raisonnement analogue : si le paramètre confocal b est grand et $f \ll b$, le rayon de courbure des surfaces d'onde incidentes ($\geq b$) reste toujours $\gg f$ et le rayon de courbure des ondes émergentes est toujours $\approx f$:

$$1 \gg \lambda f / \pi W_0^2 \approx \lambda R'_1 / \pi W_0^2 \geq \lambda R'_1 / \pi W_1^2 = \lambda R'_1 / \pi W_1'^2$$

entraîne encore, d'après (7), $z'_1 \approx R'_1 \approx f$. Le col image reste au voisinage du foyer image, quelle que soit la position du col objet.

Le rayon du col image reste très petit mais variable puisque, d'après (8), $W'_0 \approx \lambda f / \pi W_1'$; lorsque le col objet est très éloigné de la 0 lentille ($z_1 \gg b$) on retrouve sensiblement la conjugaison entre 1 col objet et col image puisque, d'après (2),

$$W'_1 = W_1 \approx \lambda z_1 / \pi W_0, \text{ et } W'_0 \approx \lambda f / \pi W_1'$$

$$\text{entraîne } W'_0 \approx W_0 f / z_1 \approx W_0 z'_1 / z_1.$$

II. 6 - 4 - Inversement, si le faisceau est très divergent et a un col très étroit situé au voisinage du foyer objet d'une lentille, de distance focale $f \gg b$ (ce qui est facile puisque b est petit), le faisceau émergent a un rayon $W'_1 = W_1 \gg W_0$ et une courbure $1/R'_1$ très faible ; sa divergence est donc faible. On peut soupçonner, en permutant les rôles de l'espace objet et de l'espace image du paragraphe précédent, que la position du col image doit être pratiquement indéterminée. Effectivement, on peut choisir une position du col objet voisine du foyer et

telle que $1/R'_1 = 0$: le col image est alors sur la lentille ; en déplaçant légèrement le col objet à partir de cette position, on fait apparaître une courbure $1/R'_1$ positive ou négative ; un calcul complet (que nous ne ferons pas) montre alors que la distance du col image à la lentille varie rapidement, jusqu'à $-z'_1 \approx \pm f^2/b$ pour un déplacement du col objet de l'ordre de $\Delta z \approx \mp b/2$, cependant que le rayon W'_0 , stationnaire pour $\Delta z \ll b$, (avec $W'_0 \approx W_1 \approx f\theta_0$) décroît jusqu'à $W'_0 \approx f\theta_0/\sqrt{2}$.

Expérimentalement, ces grands déplacements du col objet ne correspondent qu'à des modifications imperceptibles du faisceau émergent qui est pratiquement cylindrique sur une longueur de l'ordre de f^2/b .

II. 6 - 5 - Les variations de $Z' = -z'_1$ (distance du col image à la lentille) et de b' (ou W'^2_0) en fonction de $Z = z_1$ (distance de la lentille au col objet) pour un faisceau objet donné (W_0 et b donnés) ont l'allure représentée sur la figure 3 (voir l'article déjà cité).

Les courbes en pointillé correspondent à l'image que donnerait l'optique géométrique.

On a tracé les courbes correspondant aux deux cas typiques $f \gg b$ et $f \ll b$.

On notera les propriétés remarquables :

$Z = f$ entraîne $Z' = f$ et correspond au maximum de b (ou de W'^2_0) avec $b'_{\max} = 4 f^2/b$ (ou $W'^2_{0 \max} = f^2\theta_0^2$) ;

Z' reste $\approx f$ quel que soit Z si $f \ll b$;

si $f \gg b$, Z' varie très rapidement de $f - (f^2/b)$ à $f + (f^2/b)$ lorsque Z varie de $f - (b/2)$ à $f + (b/2)$.

II. 6 - 6 - Toutes ces relations supposent que la lentille ne diaphragme pas les faisceaux et qu'elle est stigmatique. Il est malheureusement beaucoup plus difficile de tenir compte des diverses imperfections habituelles : aberrations, diffraction (limitation des ouvertures), interférences parasites (dus aux réflexions ou diffusions par les surfaces).

III. Longueur d'onde

Pour des ondes planes infinies la longueur d'onde λ caractérise la distance entre deux surfaces d'onde entre lesquelles la phase des vibrations $\alpha = \arg(u)$ prend un retard de 2π . On a bien, pour l'amplitude complexe

.../

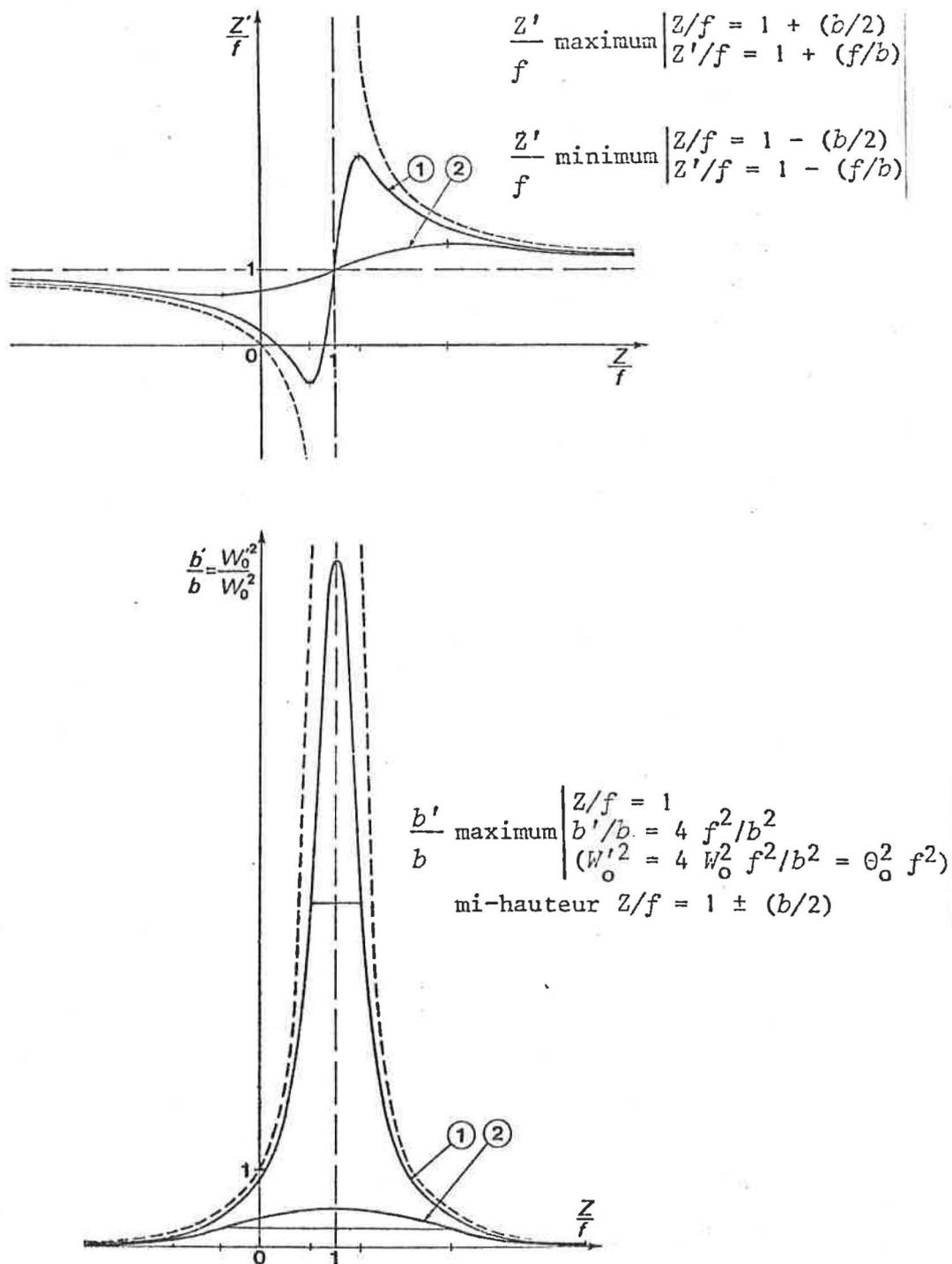


Figure 3.- Variations des caractéristiques du faisceau gaussien image en fonction de la position du col objet.

La lentille mince de distance focale f est située à la distance Z du col du faisceau objet, de rayon W_0 (de paramètre confocal b) ; le col du faisceau image, de rayon W_0' (de paramètre confocal b') est situé à la distance Z' de la lentille. Les courbes sont tracées en coordonnées réduites Z/f , Z'/f , $b'/b = W_0'^2/W_0^2$; cas 1 : $f \gg b$; cas 2 : $f \ll b$.

En tireté, variations auxquelles conduiraient les relations de l'optique géométrique.

$$u = u_0 \exp(-jkz), \quad \alpha = -jkz \text{ et}$$

$$\Delta\alpha = -k\Delta z = -2\pi\Delta z/\lambda \quad \text{ou} \quad \Delta\alpha/\Delta z = -k = -2\pi/\lambda.$$

Pour les ondes quasi-planes représentées par l'équation (1), les termes $j\phi$ et $-jkr^2/R$ s'ajoutent au terme $-jkz$ pour donner l'argument α ; la phase de l'onde n'est plus proportionnelle à l'abscisse z . On peut néanmoins définir localement la longueur d'onde λ' (et le vecteur d'onde k') par $k' = 2\pi/\lambda' = -d\alpha/dz$.

III. 1 - Sur l'axe Oz

La phase de l'onde (pour $r = 0$) est donnée par $-kz + \phi = \alpha$ avec

$$\text{tg}\phi = \frac{\lambda z}{\pi W_0^2}.$$

III. 1 - 1 - Au voisinage du col : $z \approx 0 \rightarrow \phi \approx \lambda z / \pi W_0^2$ et

$$\alpha \approx -kz + \frac{\lambda}{\pi W_0^2} z = -z \left[k - \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \right]$$

On a donc un vecteur d'onde

$$k' = 2\pi/\lambda' \approx k - \frac{\lambda}{\pi W_0^2} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\lambda}{\pi W_0^2}$$

et une longueur d'onde λ' telle que

$$1/\lambda' \approx \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\pi^2 W_0^2} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{2} \right)$$

λ' est légèrement supérieur à λ :

$$\lambda' = \lambda + \delta\lambda \text{ avec } \delta\lambda/\lambda \approx \theta_0^2/2$$

ordre de grandeur

$$\lambda = 3,39 \text{ } \mu\text{m}$$

$$W_0 = 10^{-2} \text{ m} \rightarrow \delta\lambda/\lambda \approx \theta_0^2/2 \approx 6 \times 10^{-9}$$

III. 1 - 2 - z quelconque

$$-k' = \frac{d\alpha}{dz} = -k + \frac{d\phi}{dz}$$

$$\text{avec } \frac{d\phi}{dz} = \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \frac{1}{1+\text{tg}^2\phi} = \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \frac{1}{1+(\lambda z/\pi W_0^2)^2}$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{2} \frac{1}{1+(\lambda z/\pi W_0^2)^2} \right]$$

... /

$\delta\lambda/\lambda = \theta_0^2/2 [1 + (\lambda z/\pi W_0^2)^2]$ varie en fonction de z suivant une fonction de résonance ; il est divisé par deux pour $\text{tg}\Phi = \pm 1$, soit $\Phi = \pm \frac{\pi}{4}$, soit $z_c = \pm \pi W_0^2/\lambda = \pm b/2$, (ce qui correspond aux surfaces d'onde confocales et à $W^2 = 2 W_0^2$). (Fig. 4).

On peut considérer $|2z_c| = b$ comme la "longueur" du col.

ordre de grandeur

$$\lambda = 3,39 \text{ } \mu\text{m}$$

$$W_0 = 10^{-2} \text{ m} \rightarrow z_c \approx \pm 10^2 \text{ m}$$

La région où l'on peut considérer que $\delta\lambda/\lambda \approx \theta_0^2/2$ à 10 % près est encore très étendue, au voisinage du col, puisqu'elle correspond sensiblement à $|z| < |z_c/3|$.

III. 2 - Hors de l'axe

Nous nous limitons au voisinage du col, donc

$$\Phi \approx \lambda z/\pi W_0^2 \text{ et } \alpha \approx -kz + \frac{\lambda z}{\pi W_0^2} - \frac{kr^2}{2R}$$

la relation (4) donne

$$\frac{kr^2}{2R} = \frac{r^2}{W^2} \frac{\lambda z}{\pi W_0^2}$$

$$\text{et } \alpha \approx -z \left[k - \frac{\lambda}{\pi W_0^2} + \frac{r^2}{W^2} \frac{\lambda}{\pi W_0^2} \right] ; \quad k' \approx k - \frac{\lambda}{\pi W_0^2} + \frac{r^2}{W^2} \frac{\lambda}{\pi W_0^2}$$

le terme dû à la courbure est opposé au terme dû à Φ ; on pouvait le prévoir puisque les surfaces d'onde sont concaves en direction du col : la distance entre deux surfaces d'onde décroît si l'on s'éloigne de l'axe, la longueur d'onde doit donc décroître (et le vecteur d'onde augmenter) en fonction de r .

On retrouve $k' = k$ pour $r = W \approx W_0$; la longueur d'onde (distance entre deux ondes correspondant à $\Delta\alpha = 2\pi$) est donc égale à celle des ondes planes, dans la région du col, pour la portion annulaire de l'onde de rayon $r = W_0$; elle est plus grande à l'intérieur et plus petite à l'extérieur.

Dans la mesure où on peut définir une longueur d'onde moyenne, on conçoit que celle-ci sera plus grande que λ ,

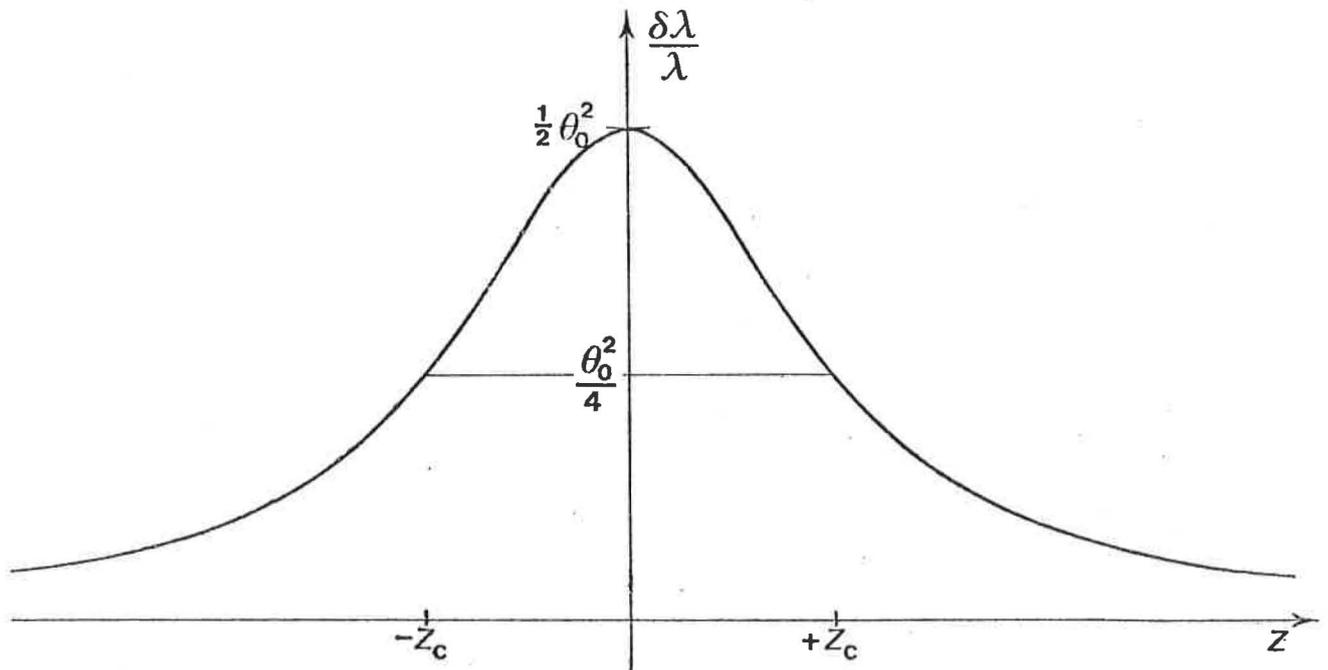


Figure 4.- Ecartes relatifs $\delta\lambda/\lambda$ de la longueur d'onde sur l'axe d'un faisceau gaussien de divergence θ_0 , par rapport à la longueur d'onde λ des ondes planes infinies de même fréquence, en fonction de l'abscisse z à partir du col.

avec un $\delta\lambda/\lambda$ moyen inférieur à $\theta_0^2/2$ et vraisemblablement de l'ordre de $\theta_0^2/4$.

III. 3 - Modes transverses

$d\phi/dz$ est multiplié par $(m + n + 1)$ ou $(2q + l + 1)$.

Le terme supplémentaire dû aux variations de ϕ est donc multiplié par le même facteur. Les autres résultats sont en général inchangés.

IV. Faisceau gaussien dans un interféromètre

Nous nous limiterons à l'interféromètre de Michelson, mais on étendrait sans peine les résultats à l'interféromètre de Perot et Fabry.

A la sortie de l'interféromètre, on fait interférer deux faisceaux gaussiens décalés longitudinalement, l'un par rapport à l'autre, de $\Delta z =$ différence de marche dans l'interféromètre.

IV.1 - Position du col

IV. 1 - 1 -

Si l'on a réglé, à la sortie, le petit diaphragme isolateur habituel très exactement au foyer image de l'objectif de sortie (par autocollimation), et si l'on règle les faisceaux gaussiens de telle façon que le col des faisceaux émergents coïncide avec ce diaphragme, le col des faisceaux dans l'interféromètre doit être au niveau du foyer objet de l'objectif de sortie. On a vu, cependant, que ce réglage est peu sensible : il suffit que le col image se déplace longitudinalement de $\pm b'/2$ pour que le col objet se déplace de $\pm f^2/b'$.

ordres de grandeur

$W'_1 = 10^{-2}$ m ; $f = 0,5$ m $\approx R'_1$; $\lambda = 3,39$ μ m ; entraînent :

$2 \pi W_1'^2 / \lambda R_1' \approx 200 \gg 1$; $W'_0 \approx W_1' / 200 = 0,05$ mm ;

$b' = 2 \pi W_0'^2 / \lambda \approx 5$ mm ; $f^2 / b' \approx 50$ m.

Il suffit de régler la position du col image à ± 1 mm près en profondeur pour que le col objet soit à environ ± 10 m du foyer objet, ce qui est encore petit par rapport à la "longueur" du col objet $b = 4 f^2 / b' \approx 200$ m.

... /

IV. 1 - 2 - De toute façon, si l'on veut que le faisceau soit le moins possible diaphragmé par l'interféromètre, il faut que le col soit au voisinage de l'interféromètre : on a ainsi un maximum de flux lumineux et un minimum de perturbations par l'ouverture limitée de l'interféromètre (diffraction).

On peut donc admettre que les faisceaux dans l'interféromètre sont toujours au voisinage du col.

IV. 2 - Interférences

IV. 2 - 1 - Δz n'est jamais grand (tout au moins pour les mesures usuelles) par rapport à la longueur du col dans l'interféromètre.

On peut donc admettre que les vecteurs d'onde (ou les longueurs d'onde) sont les mêmes, sur les deux faisceaux interférant, à la même distance de l'axe indépendamment des abscisses z (voir III.2).

On aboutirait à la même conclusion en considérant les courbures des ondes sur les deux faisceaux : la différence des courbures ($1/R_1 - 1/R_2$) que l'on calcule à partir de (3), pour $(\pi W_0^2/\lambda z) \gg 1$, est, au premier ordre proportionnelle à Δz et indépendante de z .

L'état d'interférence dépend donc de r et Δz , mais ne dépend pas de z , en première approximation.

IV. 2 - 2 - Les retards de phase correspondant au décalage longitudinal Δz dépendent de r . Pour les parties élémentaires des deux faisceaux comprises entre r et $r + dr$, le flux lumineux élémentaire résultant des interférences varie comme $1 + \cos(2\pi\Delta z/\lambda')$, avec

$$1/\lambda' = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{W_0^2} \right) \right]$$

Le récepteur fait la somme des flux lumineux élémentaires. D'après un calcul (non vérifié) de J.P. Monchalin et al., on en déduit, pour une ouverture de rayon r_0 ,

$$\overline{1/\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{4} \left(1 + \frac{\mu_0}{\exp(\mu_0) - 1} \right) \right]$$

$$\text{avec } \mu_0 = 2(r_0/W_0)^2$$

Le terme entre crochets tend vers $1 - (\theta_0^2/2)$ pour $\mu_0 \rightarrow 0$ (donc $r_0 \rightarrow 0$) ; pour $r_0 \rightarrow \infty$, il tend vers

$1 - (\theta_0^2/4)$; il décroît de façon monotone lorsque r_0 varie de 0 à l'infini.

Pour utiliser ce calcul, il faudrait encore vérifier que le récepteur a une sensibilité à peu près uniforme dans la région utilisée ; c'est pratiquement vrai pour les photomultiplicateurs, mais pas pour les photorécepteurs (In As) de très petites dimensions utilisés pour $\lambda = 3,39 \mu\text{m}$. Le récepteur risque de sélectionner des régions du faisceau de façon quelque peu aléatoire. Comme on règle le récepteur de telle façon qu'il fournisse une réponse maximale il y a toutes chances qu'il reçoive essentiellement des parties du faisceau correspondant à $r < W_0$ (86 % du flux). On doit donc s'attendre à avoir

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \mu \frac{\theta_0^2}{2}\right) \text{ avec } \mu \text{ compris entre } 1 \text{ (} r = 0 \text{) et}$$

0 ($r = W_0$) pour un récepteur de très petites dimensions et $\mu \approx \frac{1}{2}$ pour un récepteur large de sensibilité à peu près uniforme.

IV. 2 - 3 - L'ordre d'interférence pour une différence de marche D devient

$$p = D/\lambda' = \frac{D}{\lambda} \left(1 - \mu \frac{\theta_0^2}{2}\right) ; \text{ cette expression ressemble}$$

beaucoup à celle qu'on calcule, pour une source naturelle, étendue et uniforme, lorsqu'on tient compte de l'obliquité moyenne des faisceaux : si le petit diaphragme de sortie est vu, depuis l'objectif, sous un angle 2θ , l'ordre d'interférence est

$$p \approx \frac{D}{\lambda} \left(1 - \frac{\theta^2}{4}\right). \text{ Cette ressemblance est fortuite ; en}$$

particulier, pour l'effet d'obliquité, p décroît lorsque le diamètre du petit diaphragme croît, alors que, pour un faisceau gaussien, p croît lorsque le diamètre du diaphragme croît.

V. Comparaisons de longueurs d'onde

V. 1 - Interféromètre de Michelson

V. 1 - 1 - Comparaison laser/krypton ou laser/(laser + diffuseur)

On est tenté d'appliquer la correction déduite du calcul ci-dessus au faisceau gaussien fourni par le laser, et la correction d'obliquité au faisceau "naturel". Ce calcul est suspect : du fait de la diffraction par l'ouverture qui limite les faisceaux utiles dans l'interféromètre, on a probablement pour le faisceau naturel une

correction, due à la diffraction, du même ordre de grandeur que pour un faisceau gaussien. Bien que cela ne constitue qu'une présomption très qualitative, on peut rappeler à cette occasion qu'un faisceau quelconque, par exemple celui qui correspondrait à une portion d'onde plane limitée par une ouverture circulaire, peut se décomposer en une somme de faisceaux gaussiens, et que $d\Phi/dz$ comporte un facteur $(m + n + 1)$ ou $(2q + l + 1)$ pour les modes transverses.

V. 1 - 2 - Comparaison laser/laser

Le terme correctif est proportionnel à λ^2/W_0^2 . On peut soit en tenir compte, soit essayer d'utiliser, pour chaque longueur d'onde, un W_0 proportionnel à λ . Il reste à vérifier qu'on a bien des faisceaux gaussiens et que les perturbations (aberrations, diffraction aux diaphragmes, interférences parasites) ne rendent pas le calcul ou la compensation illusoire.

V. 2 - Cavité adaptée (Deslattes)

Au lieu d'un interféromètre de Michelson, on peut utiliser un interféromètre de Fabry-Perot ; les calculs précédents restent valables, avec quelques restrictions concernant la différence de marche. On peut aussi utiliser un interféromètre de Fabry-Perot à miroirs sphériques, que l'on considère alors plutôt comme une cavité résonante optique. Lorsqu'on a affaire à des faisceaux issus de lasers, (oscillant généralement sur le mode fondamental) il est avantageux d'adapter le mode fondamental de la cavité sur le mode fondamental du faisceau (mode-matched cavity). On évite ainsi que le faisceau ne se décompose, dans la cavité, en une superposition de modes comprenant une forte proportion de modes transverses, proportion qu'il serait d'ailleurs peu aisé de déterminer.

V. 2 - 1 - Variation de l'ordre d'interférence

Il est commode, pour des raisons que nous verrons plus loin, d'utiliser une cavité constituée de deux miroirs, l'un plan et l'autre sphérique. On a en général deux longueurs de cavité correspondant au même mode fondamental, donc adaptées au même faisceau incident.

En effet, puisque, le long du faisceau gaussien, le rayon de courbure R passe par un minimum R_m lorsque z croît de 0 à l'infini (voir II. 4, R_m correspond aux surfaces d'onde confocales), on a deux valeurs z_1 et z_2 de z correspondant à une même valeur de $R > R_m$.

Le même faisceau incident sera adapté à la cavité plan-sphérique si son col se trouve sur le miroir plan et

si le miroir sphérique, de rayon de courbure R , est placé à l'une ou l'autre des abscisses z_1 et z_2 .

On peut donc faire varier l'ordre d'interférence p en déplaçant le même miroir sphérique de z_1 à z_2 , sans modifier ni le faisceau, ni la position du miroir plan.

V. 2 - 2 - Adaptation pour deux longueurs d'onde

Si on veut que la même cavité, aux épaisseurs z_1 et z_2 , soit adaptée aux faisceaux gaussiens de deux lasers (longueurs d'onde λ' et λ'' pour des ondes planes), il faut que les faisceaux aient le même rayon de courbure R aux mêmes abscisses z_1 et z_2 par rapport au col, ce dernier coïncidant dans les deux cas avec le miroir plan.

Il faut donc, d'après (3), que $W'_0{}^2/\lambda'$ et $W''_0{}^2/\lambda''$ aient la même valeur.

Il en résulte d'après (2), qu'à l'une ou l'autre des abscisses z_1 et z_2 on doit aussi avoir la même valeur de W^2/W_0^2 pour les deux longueurs d'onde. Donc W'_0 et W''_0 , rayons du col sur le miroir plan, W'_1 et W''_1 , W'_2 et W''_2 , rayons des faisceaux sur le miroir sphérique, sont dans le rapport $\sqrt{\lambda'/\lambda''}$.

De plus, d'après (4), pour une même longueur d'onde, les rayons W_1 et W_2 du faisceau en z_1 et z_2 (qui correspondent au même rayon de courbure R) sont dans le rapport $W_1/W_2 = \sqrt{z_1/z_2}$.

On utilise donc une surface des miroirs différente suivant la longueur d'onde et suivant l'ordre d'interférence.

ordres de grandeur

pour $z_1 = 0,5$ m et $z_2 = 2$ m, il faut $R = 2,5$ m ;

pour $\lambda' = 3,39$ μm et $\lambda'' = 0,63$ μm , on a alors :

$$W'_0 \approx 1 \text{ mm} ; W''_0 \approx 0,44 \text{ mm} ; W'_1 \approx 1,1 \text{ mm} ; \\ W''_1 \approx 0,5 \text{ mm} ; W'_2 \approx 2,2 \text{ mm} ; W''_2 \approx 1 \text{ mm}.$$

Si on cherche une exactitude (sur le rapport λ'/λ'') de l'ordre de 1×10^{-9} , il faut que la translation soit la même, pour les deux radiations à 10^{-9} Δz près, soit pour $\Delta z = 1,5$ m par exemple, à $\approx 10^{-3}$ frange près pour $\lambda' = 3,39$ μm ou $\approx 5 \times 10^{-3}$ frange près pour $\lambda'' = 0,63$ μm .

Si $S(W)$ est la surface moyenne à l'intérieur du rayon W , il faut donc que l'écart entre $S(W'_1)$ et $S(W'_2)$, soit le même qu'entre $S(W''_1)$ et $S(W''_2)$, avec la précision ci-dessus.

V. 3 - Comparaison

Dans le cas de l'interféromètre de Michelson, la difficulté principale pour dépasser l'exactitude de 1×10^{-9} semble résider, actuellement, dans l'évaluation de la différence entre λ , longueur d'onde des ondes planes illimitées, et la longueur d'onde λ' des ondes réelles, qui ne sont ni planes ni infinies.

Dans le cas de la cavité adaptée en mode, il semble que la difficulté principale réside dans l'évaluation des défauts des surfaces. La petitesse des diamètres utiles permet de rendre négligeables les effets des aberrations et de la diffraction proprement dite (limitation du diamètre des faisceaux), mais il n'élimine pas complètement la difficulté d'obtenir des faisceaux vraiment gaussiens (interférences parasites, diffusion, microgéométrie des surfaces). En gros, on échange la difficulté de relier la longueur d'onde effective λ' à la géométrie des surfaces d'onde (ni parfaitement planes, ni parfaitement gaussiennes) contre la difficulté de connaître la géométrie des surfaces des miroirs de la cavité ; ces difficultés sont d'ordres trop différents pour que le choix soit évident. Il se peut d'ailleurs que la limite la plus fondamentale soit dans la difficulté d'obtenir des faisceaux vraiment gaussiens, qui paraissent tout de même un peu plus accessibles que des ondes planes infinies.

