BIPM/68-6

P. CARRE

COMPLEMENT A
TRAVAUX DU MOIS D'OCTOBRE 1968

Cette note est un complément à celle qui accompagne mes "travaux" de février 1968 et qui elle-même complétait celle de janvier. Cette note-ci devrait elle-même avoir un jour un complément.

SOUS-PROGRAMMES DE PRECISION ETENDUE AMELIOREE

MULTIPLICATION

La multiplication en virgule flottante utilise un sous-programme de multiplication en virgule fixe triple longueur. Au moyen d'une programmation très serrée, j'ai fait passer la durée de cette opération (il y a 6 produits partiels à calculer, cadrer, additionner) de 1,4 ms à un peu moins de 0,7 ms.

EXPONENTIELLE

J'ai déjà indiqué que e^z s'écrit sous la forme :

$$e^z = \frac{P(z)}{P(-z)} .$$

On obtient la précision souhaitée avec :

$$P(z) = 120 + 60z + 12z^2 + z^3 \quad \text{pour } /z/ < \frac{\ln 2}{8} .$$

Si on exprime le quotient de polynomes sous une forme analogue à une fraction continue on remplace des multiplications par un nombre bien moindre de divisions. On peut donc hésiter sur la méthode . Mais la fraction continue contient des termes du type a/z dont l'ordre de grandeur varie énormément de sorte que l'on est pratiquement obligé de travailler en virgule flottante.

Au contraire, les polynomes ont un ordre de grandeur invariable, on peut donc travailler en virgule fixe.

.../

Evidemment on calculera :

$$P(z) = ((z + 12)z + 60)z + 120$$
$$-P(-z) = ((z - 12)z + 60)z - 120$$

et on fera le quotient en virgule fixe.

En mettant ces considérations en pratique la durée d'exécution est passée de 36 ms à 24 ms (le 9 octobre). L'amélioration de la rapidité de la multiplication l'a fait passer à 15 ms (28 octobre).

Il va sans dire que la précision est sauvegardée.

ARC tgte : PRINCIPE

On partage le domaine de variation de l'argument x ($-\infty$, $+\infty$) en un nombre impair d'intervalles. J'ai choisi 9. Les limites en sont donc :

$$-\infty \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{18}\right)$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{18}\right) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{18}\right) \quad +\infty .$$

On cherche d'abord si x est compris dans l'intervalle central. Si oui on passe au calcul. Si non, si x est négatif on change son signe, ce qui ramène au cas x positif. On repère alors dans lequel des 4 intervalles possibles x se trouve (en simple précision bien sûr). Désignons par α l'arc correspondant ~~à la borne inférieure~~ au milieu de cet intervalle et par y l'arc cherché.

$$\operatorname{tg}(y-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}y - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x - \operatorname{tg}\alpha}{1 + x\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\dfrac{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}{x + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}}{} = u$$

On est donc ramené à :

$$z = y - \alpha = \operatorname{Arc\,tg} u.$$

On voit que u s'obtient moyennant une addition, une division et une soustraction, les 4 couples de constantes $1/\operatorname{tg}\alpha$ et $1 + (1/\operatorname{tg}\alpha)^2$ étant mémorisés.

Ainsi $/u/ \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{18} \approx 0{,}176.$

J'ai choisi de calculer u par un développement polynomial (polynome de Tchebichef plus économique que la série de Mac Laurin).

.../

$$z = u - 0{,}333\,333\,333\,330\,3\,u^3 + 0{,}199\,999\,999\,354\,1\,u^5$$
$$- 0{,}142\,857\,043\,604\,2\,u^7 + 0{,}111\,103\,259\,178\,4\,u^9$$
$$- 0{,}090\,575\,046\,111\,8\,u^{11} + 0{,}069\,610\,657\,817\,5\,u^{13}$$

En fait, on calcule $v = u^2$ puis

$$(((((f\,v + e)v + d)v + c)v + b)v + a)v + 1,$$

tout cela en virgule fixe. Puis on multiplie par u en virgule flottante. Cela a l'avantage de donner une précision <u>relative</u> constante. Enfin, s'il y a lieu, on ajoute α à la valeur trouvée et éventuellement on change le signe du résultat.

30 octobre 1968.