Bureau International des Poids et Mesures

Rapport BIPM-91/1

Mesure de l'accélération due à la pesanteur par la méthode des stations multiples : incertitudes sur cette grandeur et sur les autres paramètres ajustés

par Pierre Carré
ancien Physicien chercheur principal du BIPM

I.- INTRODUCTION

Voici une dizaine d'années, j'avais tenté d'établir des formules explicites qui auraient permis de calculer l'incertitude des divers paramètres ajustés lors de la réduction d'une mesure de l'accélération due à la pesanteur effectuée avec le gravimètre absolu transportable du BIPM.

J'ai réussi récemment à conduire à leur terme les calculs alors entrepris, de sorte qu'il m'est maintenant possible de donner ces formules. Tel est l'objet du présent rapport. Naturellement, le paramètre le plus important est g_s, accélération due à la pesanteur au sommet de la trajectoire, ou g_r, accélération due à la pesanteur "au point de référence". L'incertitude en question est caractérisée par la variance du paramètre considéré. Je montre que, deux paramètres indépendants descriptifs de l'expérience ayant été choisis (par exemple l'équidistance des stations de mesure et leur nombre total), elle s'exprime comme le produit de cinq termes :

- un coefficient numérique qui dépend uniquement de la nature des paramètres ajustés et non de l'expérience particulière effectuée ;
- une puissance entière ou demi-entière de g_s (ou g_r) ;
- une puissance entière ou demi-entière du premier paramètre descriptif ;

- une puissance entière ou demi-entière du second ;
- la variance d'une observation.

Cette dernière est naturellement fonction des qualités métrologiques du gravimètre et des conditions expérimentales, mais aussi de l'exactitude de la loi théorique du mouvement admise. Dans ce qui suit, ce dernier terme ne sera généralement pas explicité ; le produit des quatre premiers sera appelé <u>variance réduite</u>.

Ces formules s'appliquent de même à tout gravimètre éventuel encore à l'état de projet, à condition que le même principe de fonctionnement soit retenu. Je pense qu'elles pourraient être utiles pour fixer certaines caractéristiques d'un tel appareil, par exemple la hauteur de chute, l'équidistance entre les stations, la résolution du chronomètre, etc.

Outre les variances des paramètres ajustés, l'étude présentée dans ce rapport fournit les covariances entre ces paramètres pris deux à deux. Ces dernières s'expriment sous une forme identique aux variances. Leur connaissance est parfois nécessaire, en particulier pour obtenir les variances de grandeurs qui s'expriment comme des fonctions d'au moins deux paramètres ajustés.

II.- RAPPEL : PRINCIPE DE LA MESURE ET DU TRAITEMENT DES DONNEES

1. <u>Loi du mouvement</u>

La direction positive de l'axe des cotes z est choisie vers le bas ; l'origine est au sommet de la trajectoire.

Soit g, fonction de z, le module de l'accélération due à la pesanteur, g_s sa valeur au sommet de la trajectoire et

$$\gamma = \frac{dg}{dz}$$

son gradient ; on a

$$g = g_s + \gamma z.$$

Soit ϕ le coefficient de traînée aérodynamique, défini ici comme la force de freinage exercée sur le mobile par l'air résiduel divisée par la vitesse et par la masse du mobile : la force exercée est donc

$$- \phi m \cdot \frac{dz}{dt} \cdot$$

Soit enfin t le temps et t_s l'instant exact du passage du centre de masse du mobile au sommet de la trajectoire.

On établit aisément que la loi du mouvement, limitée aux termes du premier ordre en ϕ et γ, est

$$z = \frac{1}{2} g_s (t - t_s)^2 - \frac{\phi}{6} g_s (t - t_s)^3 + \frac{\gamma}{24} g_s (t - t_s)^4 \cdot \qquad (1)$$

2. **Stations**

J'introduis maintenant

- la distance d entre stations consécutives ; les distances d successives sont égales entre elles (elles sont définies comme un multiple de la demi-longueur d'onde de la radiation utilisée dans l'interféromètre) ;
- la cote z_o de la première station à la montée.

Les stations franchies par le mobile, d'une part en montée, d'autre part en descente, se correspondent deux à deux. Si n (supposé pair) est le nombre total de stations, la montée concerne les stations de rangs 1 à $n/2$ et la descente les stations de rangs $n/2 + 1$ à n. Les rangs de deux stations en correspondance ont pour somme $n + 1$.

En montée, la cote de la station de rang p est

$$z_p = z_o - (p - 1)d \qquad (1 \leq p \leq n/2) \cdot \qquad \text{(2m)}$$

En descente, la station de rang p correspond à la station de rang $n + 1 - p$ en montée ; par ailleurs, on admet l'existence entre ces deux stations d'un décalage δ, indépendant de p [1]. La cote de la station de rang p est donc

$$z_p = z_o - (n - p)d + \delta \qquad (n/2 + 1 \leq p \leq n). \tag{2d}$$

La mesure consiste essentiellement à déterminer les instants de passage t_p (pour $p = 1, 2, \dots n$) du centre de masse du mobile à chacune des stations retenues.

3. Ajustement

On ajuste les paramètres g_s, ϕ, γ, t_s, z_o et δ de façon à rendre minimale l'expression

$$\sum_p e_p^{\,2} \quad \text{avec} \quad e_p = z - z_p,$$

dans laquelle la somme est étendue à toutes les valeurs de p retenues ; z est donnée par l'expression (1) dans laquelle t prend la valeur t_p et z_p est donnée par l'une ou l'autre des expressions (2m) ou (2d).

Pour simplifier l'écriture, je désigne par v_j ($j = 1, 2, \dots 6$) les paramètres ci-dessus, pris dans l'ordre indiqué, et par $w_{j,p}$ la valeur de la dérivée partielle de e_p par rapport au paramètre v_j.

Avec ces notations, les corrections Δv_j qu'il faut appliquer aux valeurs approchées de v_j sont les solutions du système de 6 équations linéaires suivant

[1] En principe, les stations franchies en descente sont équidistantes et cette équidistance est la même qu'en montée puisque les "franges d'interférence" comptées entre deux stations consécutives sont toujours en nombre égal. Toutefois, on pourrait craindre que le retard Δt introduit par les circuits électroniques soit fonction de la fréquence du signal (égale à la fréquence des "franges d'interférence") et donc variable au cours du mouvement libre du trièdre. On aurait donc (avec des notations évidentes) $\Delta t = \Phi(f) = \Phi\,(|v|/(\lambda/2))$; la cote devrait être corrigée de $\Delta z = v\ \Delta t = g_s\ (t - t_s) \cdot \Phi\ (2g_s|t - t_s|/\lambda)$, qui est une fonction impaire de $t - t_s$. L'absence d'une telle correction n'affecterait pas les coefficients des puissances paires de $t - t_s$, en particulier g_s, l'intervalle de variation de $t - t_s$ étant centré sur 0 ; cela justifie l'approximation faite qui consiste à admettre que δ est indépendant de p. En revanche, il pourrait en résulter une petite erreur sur ϕ, coefficient de traînée aérodynamique, erreur qu'il serait d'ailleurs facile d'évaluer si l'on connaissait la fonction $\Phi(f)$.

$$\sum_{j=1}^{6} \left[\left(\sum_{p} w_{i,p} \cdot w_{j,p} \right) \cdot \Delta v_j \right] = - \sum_{p} e_p \cdot w_{i,p} \qquad (1 \le i \le 6).$$

Plusieurs itérations peuvent être nécessaires. On a

$$w_{1,p} = \frac{\partial e_p}{\partial g_s} = \frac{1}{2} (t_p - t_s)^2 - \frac{\phi}{6} (t_p - t_s)^3 + \frac{\gamma}{24} (t_p - t_s)^4 ;$$

$$w_{2,p} = \frac{\partial e_p}{\partial \phi} = - \frac{1}{6} g_s (t_p - t_s)^3 ;$$

$$w_{3,p} = \frac{\partial e_p}{\partial \gamma} = \frac{1}{24} g_s (t_p - t_s)^4 ;$$

$$w_{4,p} = \frac{\partial e_p}{\partial t_s} = - g_s (t_p - t_s) + \frac{\phi}{2} g_s (t_p - t_s)^2 - \frac{\gamma}{6} g_s (t_p - t_s)^3 ;$$

$$w_{5,p} = \frac{\partial e_p}{\partial z_o} = - 1 ;$$

$$w_{6,p} = \frac{\partial e_p}{\partial \delta} = \begin{cases} 0 \text{ pour } 1 \le p \le n/2, \\ - 1 \text{ pour } n/2 + 1 \le p \le n. \end{cases}$$

L'inverse de la matrice des coefficients du premier membre (matrice d'ordre 6) constitue la matrice des variances et covariances réduites des paramètres ajustés. Il suffit de la multiplier par σ_1^2, variance d'une observation (ici, estimée par la variance de l'échantillon des écarts e_p), pour obtenir les variances et covariances réelles.

Naturellement, pour traiter les données d'une mesure effective, et trouver les corrections Δv_j, tous les termes écrits ci-dessus doivent être conservés. En revanche, dans la présente étude, dont le but est seulement d'établir des expressions pour les incertitudes, quelques approximations sont parfaitement légitimes.

III.- APPROXIMATION DE LA MATRICE M DES COEFFICIENTS DES PREMIERS MEMBRES

Dans les expressions de $w_{i,p}$ données ci-dessus, je ne conserve que le terme principal :

$$w_{1,p} = \frac{1}{2} (t_p - t_s)^2 ;$$

$$w_{2,p} = -\frac{1}{6} g_s (t_p - t_s)^3 ;$$

$$w_{3,p} = \frac{1}{24} g_s (t_p - t_s)^4 ;$$

$$w_{4,p} = - g_s (t_p - t_s) ;$$

$$w_{5,p} = - 1 ;$$

$$w_{6,p} = 0 \text{ ou } - 1 ,$$

la première valeur étant valable en montée et la seconde en descente.

Pour le calcul de t_p - t_s, je néglige δ et je suppose que la cote de la dernière station en montée, de rang $n/2$, est égale à sa valeur moyenne $d/2$. On a alors, d'après (2m)

$$z_{n/2} = z_o - \left(\frac{n}{2} - 1\right) d = \frac{d}{2}$$

d'où

$$z_o = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) d$$

et

$$z_p = \left(\frac{n}{2} - p + \frac{1}{2}\right) d \qquad (1 \leq p \leq n/2).$$

D'après (2d), on a de même

$$z_p = \left(p - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) d \qquad (n/2 + 1 \leq p \leq n).$$

Il est commode de poser
- en montée

$$\frac{n}{2} - p + \frac{1}{2} = q$$

d'où $z_p = qd$, q décroissant de $n/2$ - 1/2 à 1/2 par pas de 1 ;
- en descente

$$p - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = q$$

d'où $z_p = qd$, q croissant de 1/2 à $n/2$ - 1/2 par pas de 1.

Cela permet d'appliquer les mêmes formules simples en montée et en descente et d'avoir les mêmes limites de variation du paramètre q ; en contrepartie, nous avons, il est vrai, deux relations différentes entre p et q, l'une valable en montée et l'autre en descente.

Je calcule maintenant t_p - t_s en conservant seulement, dans l'expression (1), le terme principal :

$$(t_p - t_s)^2 = \frac{2z_p}{g_s} = \frac{2d}{g_s}\,q,$$

c'est-à-dire, en montée

$$t_p - t_s = - \left(\frac{2d}{g_s}\,q\right)^{1/2}$$

et en descente

$$t_p - t_s = + \left(\frac{2d}{g_s}\,q\right)^{1/2},$$

q prenant toutes les valeurs demi-entières de 1/2 à $n/2$ - 1/2.

Dans les expressions de $w_{i,p}$, il intervient $(t_p - t_s)^l$ avec $l = 0, 1, 2, 3$ et 4 ; dans les produits $w_{i,p} \cdot w_{j,p}$, il intervient donc $(t_p - t_s)^k$ avec $k = 0, 1, \dots 8$.

Pour calculer les sommes étendues à toutes les valeurs retenues de p, je traite les stations éliminées au voisinage du sommet de la trajectoire comme si elles étaient conservées (ce sont celles qui donnent, d'ailleurs, la contribution la plus faible) et je remplace les sommes finies $\Sigma q^{k/2}$, dans lesquelles q varie, comme je l'ai dit, de 1/2 à $n/2$ - 1/2 par pas de 1, par les intégrales définies

$$\int_0^{n/2} x^{k/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{k}{2}+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1}.$$

Je calcule d'abord la contribution Σ_2 des stations en descente.

$$\Sigma_2 (t_p - t_s)^k = \left(\frac{2d}{g_s}\right)^{k/2} \Sigma_2\, q^{k/2} = \left(\frac{2d}{g_s}\right)^{k/2} \cdot \frac{1}{\frac{k}{2}+1} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1}$$

$$= \left(\frac{d}{g_s}\right)^{k/2} \cdot \frac{n^{k/2+1}}{k+2} .$$

Si i = 6 ou j = 6, la contribution des stations en montée est nulle, puisque $w_{6,p}$ = 0 en montée ; seule la somme Σ_2 doit être retenue.

Sinon, il faut tenir compte de la contribution des stations à la montée, caractérisée par une somme Σ_1, égale à Σ_2 si k est pair et à - Σ_2 si k est impair ; dans ce dernier cas, le terme correspondant de la matrice est nul.

Finalement, les termes $m_{i,j}$ de la matrice **M** cherchée sont :

$$m_{1,1} = 2\,(\tfrac{1}{2})^2\ \Sigma_2(t_p - t_s)^4 = \frac{1}{12}\, g_s^{-2}\, d^2 n^3\ ;$$

$$m_{2,2} = 2\,(\tfrac{1}{6})^2\, g_s^{\,2}\ \Sigma_2(t_p - t_s)^6 = \frac{1}{144}\, g_s^{-1}\, d^3 n^4\ ;$$

$$m_{3,3} = 2\,(\tfrac{1}{24})^2\, g_s^{\,2}\, \Sigma_2(t_p - t_s)^8 = \frac{1}{2880}\, g_s^{-2}\, d^4 n^5\ ;$$

$$m_{4,4} = 2\, g_s^{\,2}\, \Sigma_2(t_p - t_s)^2 = \frac{1}{2}\, g_s\, d\, n^2\ ;$$

$$m_{5,5} = 2\ \Sigma_2\ (1) = n\ ;$$

$$m_{6,6} = \Sigma_2\ (1) = \frac{1}{2}\, n\ ;$$

$$m_{1,2} = m_{2,1} = m_{2,3} = m_{3,2} = m_{3,4} = m_{4,3} = m_{4,5} = m_{5,4} = 0\ ;$$

$$m_{5,6} = m_{6,5} = \Sigma_2(1) = \frac{1}{2}\, n \,;$$

$$m_{1,3} = m_{3,1} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{24}\, g_s\, \Sigma_2(t_p - t_s)^6 = \frac{1}{192}\, g_s^{-2}\, d^3 n^4 \,;$$

$$m_{2,4} = m_{4,2} = 2 \times \frac{1}{6}\, g_s^{\,2}\, \Sigma_2(t_p - t_s)^4 = \frac{1}{18}\, d^2 n^3 \,;$$

$$m_{3,5} = m_{5,3} = -\,2 \times \frac{1}{24}\, g_s\, \Sigma_2(t_p - t_s)^4 = -\,\frac{1}{72}\, g_s^{-1}\, d^2 n^3 \,;$$

$$m_{4,6} = m_{6,4} = g_s\, \Sigma_2(t_p - t_s) = \frac{1}{3}\, g_s^{1/2}\, d^{1/2} n^{3/2} \,;$$

$$m_{1,4} = m_{4,1} = m_{2,5} = m_{5,2} = 0 \,;$$

$$m_{3,6} = m_{6,3} = -\,\frac{1}{24}\, g_s\, \Sigma_2(t_p - t_s)^4 = -\,\frac{1}{144}\, g_s^{-1}\, d^2 n^3 \,;$$

$$m_{1,5} = m_{5,1} = -\,2 \times \frac{1}{2}\, \Sigma_2(t_p - t_s)^2 = -\,\frac{1}{4}\, g_s^{-1}\, d\, n^2 \,;$$

$$m_{2,6} = m_{6,2} = \frac{1}{6}\, g_s \Sigma_2(t_p - t_s)^3 = \frac{1}{30}\, g_s^{-1/2}\, d^{3/2}\, n^{5/2} \,;$$

$$m_{1,6} = m_{6,1} = -\frac{1}{2}\,\Sigma_2(t_p - t_s)^2 = -\frac{1}{8}\,g_s^{-1}\,d\,n^2 .$$

Pour chaque élément non nul de la matrice symétrique **M**, j'indique ci-dessous le coefficient numérique, l'exposant de g_s, celui de d et celui de n.

$\frac{1}{12}$ -2 2 3	....	$\frac{1}{192}$ -2 3 4	....	$-\frac{1}{4}$ -1 1 2	$-\frac{1}{8}$ -1 1 2
....	$\frac{1}{144}$ -1 3 4	....	$\frac{1}{18}$ 0 2 3	....	$\frac{1}{30}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$
$\frac{1}{192}$ -2 3 4	....	$\frac{1}{2880}$ -2 4 5	....	$-\frac{1}{72}$ -1 2 3	$-\frac{1}{144}$ -1 2 3
....	$\frac{1}{18}$ 0 2 3	....	$\frac{1}{2}$ 1 1 2	....	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{4}$ -1 1 2	....	$-\frac{1}{72}$ -1 2 3	....	1 0 0 1	$\frac{1}{2}$ 0 0 1
$-\frac{1}{8}$ -1 1 2	$\frac{1}{30}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{144}$ -1 2 3	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$ 0 0 1	$\frac{1}{2}$ 0 0 1

On constate que, pour chaque élément de **M**, l'exposant de g_s (et, de même, celui de d et celui de n) est égal à la somme d'une valeur a_i (et, de même, b_i et c_i) qui ne dépend que de la ligne i et d'une valeur a_j (et, de même, b_j et c_j) qui ne dépend que de la colonne j. Plus précisément, on a

$$(a_1, b_1, c_1) = (-1, 1, \tfrac{3}{2}) ;$$

$$(a_2, b_2, c_2) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 2) ;$$

$$(a_3, b_3, c_3) = (-1, 2, \tfrac{5}{2}) ;$$

$$(a_4, b_4, c_4) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1) ;$$

$$(a_5, b_5, c_5) = (a_6, b_6, c_6) = (0, 0, \tfrac{1}{2}).$$

Il en résulte que, si **N** représente la matrice des coefficients numériques de **M** et si **C** est la matrice diagonale dont l'élément de ligne i et de colonne i est

$$g_s^{a_i} \cdot d^{b_i} \cdot n^{c_i},$$

on a

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \times \mathbf{N} \times \mathbf{C}.$$

IV.- VARIANCES ET COVARIANCES

La matrice des variances et covariances réduites (c'est-à-dire divisées par $\sigma_1^{\,2}$, variance d'une observation) est

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \times \mathbf{N}^{-1} \times \mathbf{C}^{-1}.$$

L'élément de ligne i et de colonne i de la matrice diagonale $\mathbf{C}^{-1}$ est

$$g_s^{-a_i} \cdot d^{-b_i} \cdot n^{-c_i}.$$

Il reste donc à calculer l'inverse de la matrice numérique **N**.

Ce calcul étant effectué, on peut représenter la matrice $\mathbf{M}^{-1}$ par le tableau ci-dessous dans lequel chaque élément non nul de $\mathbf{M}^{-1}$ est représenté par son coefficient numérique (qui se trouve être toujours un entier), l'exposant de g_s, celui de d et celui de n.

768 2 -2 -3	. . . .	-8640 2 -3 -4	. . . .	72 1 -1 -2	. . . .
. . . .	3600 1 -3 -4	. . . .	-720 0 -2 -3	240 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	480 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$
-8640 2 -3 -4	. . . .	103680 2 -4 -5	. . . .	-720 1 -2 -3	. . . .
. . . .	-720 0 -2 -3	. . . .	162 -1 -1-2	60 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	-120 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$
72 1 -1 -2	-240 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	-720 1 -2 -3	60 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	34 0 0 -1	-50 0 0 -1
. . . .	480 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	. . . .	-120 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	-50 0 0 -1	100 0 0 -1

Je rappelle ici que les paramètres ajustés sont, dans l'ordre adopté en II.3, g_s, ϕ, γ, t_s, z_o et δ.

. Première application : minimum de la variance de g

En un point de cote z, on a

$$g = g_s + \gamma z,$$

d'où

$$\sigma^2(g) = \sigma^2(g_s) + 2\, z.\text{covar}\,(g_s, \gamma) + z^2 \cdot \sigma^2(\gamma).$$

Le minimum est obtenu à la cote z_r telle que la dérivée de $\sigma^2(g)$ par rapport à z soit nulle, c'est-à-dire

$$\text{covar}\,(g_s, \gamma) + z_r \cdot \sigma^2(\gamma) = 0,$$

soit

$$z_r = \frac{-\operatorname{covar}(g_s, \gamma)}{\sigma^2(\gamma)} = \frac{8640\, g_s^2\, d^{-3}\, n^{-4}}{103680\, g_s^2\, d^{-4}\, n^{-5}} = \frac{nd}{12} = \frac{h}{6}\ .$$

On a posé

$$\frac{n}{2} \cdot d = h\,;$$

c'est la "hauteur de chute", égale à la cote qui correspond à la borne supérieure des intégrales définies introduites en III, et approximativement égale à z_o.

La variance de g est donc minimale au sixième de la hauteur de chute au-dessous du sommet de la trajectoire. C'est ce point qui est appelé "point de référence".

En remarquant que

$$2z_r \cdot \operatorname{covar}(g_s, \gamma) = -\,2z_r^2\, \sigma^2\,(\gamma),$$

cette valeur minimale s'écrit

$$\sigma^2\,(g_r) = \sigma^2(g_s) - z_r^2\, \sigma^2(\gamma)$$

$$= \left(768\, g_s^2\, d^{-2} n^{-3} - \frac{n^2 d^2}{144} \times 103680\, g_s^2\, d^{-4}\, n^{-5}\right) \sigma_1^2$$

$$= 48\, g_s^2\, d^{-2}\, n^{-3}\, \sigma_1^2.$$

La variance de g_r (accélération due à la pesanteur au point de référence) est 16 fois plus petite que la variance de g_s (accélération due à la pesanteur au sommet de la trajectoire).

De plus, il est aisé de montrer que la covariance de g_r et de γ est nulle.

En effet

$$\mathrm{covar}\,(g_r, \gamma) = \mathrm{covar}\,(g_s + \gamma z_r, \gamma)$$

$$= \mathrm{covar}\,(g_s, \gamma) + z_r \cdot \sigma^2\,(\gamma)$$

$$= 0,$$

d'après la relation qui, un peu plus haut, nous a donné z_r.

<u>Numériquement</u>, avec g = 9,81 m.s^{-2}, d = 316 nm × 2048, n = 1250 et σ_1^2 = 1 nm^2, on obtient

$$\sigma^2(g_s) = 90{,}4\ \mathrm{nm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-4} \quad \text{soit} \quad \sigma(g_s) = 9{,}5\ \mathrm{nm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2},$$
$$\sigma^2(g_r) = 5{,}6\ \mathrm{nm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-4} \quad \text{soit} \quad \sigma(g_r) = 2{,}4\ \mathrm{nm}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

<u>Remarque</u>

On dispose de trois paramètres descriptifs simples : d, n et la hauteur de chute $h = n/2\ .\ d$. On peut donc être amené à réécrire les formules données en fonction des deux paramètres les plus appropriés. Alors que l'on vient de constater que $\sigma^2(g_s)$, comme d'ailleurs $\sigma^2(g_r)$, est proportionnelle à $1/d^2$ pour n constant et à $1/n^3$ pour d constante, on voit ainsi que, pour h constante, ces variances sont proportionnelles à d, ou, si l'on préfère, à $1/n$.

. <u>Seconde application : influence de la résolution du chronomètre</u>

Dans la pratique, σ_1^2 est estimée d'après les écarts résiduels de l'ajustement. Ici, je calcule la contribution à cette variance de la résolution finie du chronomètre. Soit b la résolution du chronomètre (par exemple, un interpolateur à 12 bits entre impulsions de période 100 ns correspond à b = 100 ns/2^{12} = 24,4 ps). L'erreur de chronométrage a une densité de probabilité constante entre - $b/2$ et + $b/2$; les écarts résiduels sur la cote ont donc une densité de probabilité constante entre - $|v|b/2$ et + $|v|b/2$, ce qui correspond à la variance

$$\frac{v^2\, b^2}{12},$$

v étant la vitesse du mobile. On a $v^2 = g_s^{\ 2}\,(t_p - t_s)^2$. Les contributions de la montée et de la descente à la somme des carrés des écarts résiduels sont égales. Cette somme est donc

$$2\,\frac{b^2}{12}\,g_s^{\ 2}\,\Sigma_2\,(t_p - t_s)^2 = \frac{1}{24}\,b^2\,g_s\,d\,n^2,$$

d'après les relations établies en III.

On a donc

$$\sigma_1^{\ 2} = \frac{1}{24}\,b^2\,g_s\,d\,n.$$

Compte tenu de la valeur du terme de ligne 1 et colonne 1 de $\mathbf{M}^{-1}$, on en déduit

$$\sigma^2\,(g_s) = 32\,b^2\,g_s^{\ 3}\,d^{-1}\,n^{-2}\,;$$

et, d'après le résultat obtenu dans la première application,

$$\sigma^2\,(g_r) = 2\,b^2\,g_s^{\ 3}\,d^{-1}\,n^{-2}.$$

Numériquement, avec b = 24,4 ps, g_s = 9,81 m.s^{-2}, d = 316 nm × 2048, n = 1250, on obtient

$\sigma^2(g_s)$ = 0,0178 nm^2 s^{-4} soit $\sigma(g_s)$ = 0,133 nm.s^{-2},
$\sigma^2(g_r)$ = 0,0011 nm^2 s^{-4} soit $\sigma(g_r)$ = 0,033 nm.s^{-2}.

Les écarts-types calculés n'ont évidemment de sens que si la contribution à la variance d'une observation de la résolution finie du chronomètre est prépondérante devant les autres contributions ; ce n'est certainement pas le cas, mais ils montrent clairement qu'une réduction du nombre de bits de l'interpolateur pourrait être envisagée : avec 10 bits seulement, la résolution b serait quadruplée, $\sigma^2(g_s)$ et $\sigma^2(g_r)$ seraient multipliées par 16 et les écarts-types associés seraient quadruplés ; les nouvelles valeurs, 0,53 et 0,13 nm . s^{-2}, ne correspondraient encore qu'à des incertitudes relatives de 53×10^{-12} et 13×10^{-12}.

V.- ETUDE DU CAS OU LA VALEUR DU GRADIENT EST IMPOSEE

Les cinq paramètres ajustés sont maintenant g_s, ϕ, t_s, z_o et δ, la valeur de γ est imposée.

La nouvelle matrice **M** s'obtient simplement en supprimant dans la matrice **M** du III la ligne 3 et la colonne 3. En adoptant la même représentation abrégée (coefficient numérique, exposants de g_s, d et n), c'est :

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{12}\ \ -2\ 2\ 3 & \cdots & \cdots & -\frac{1}{4}\ \ -1\ 1\ 2 & -\frac{1}{8}\ \ -1\ 1\ 2 \\
\cdots & \frac{1}{144}\ \ -1\ 3\ 4 & \frac{1}{18}\ \ 0\ 2\ 3 & \cdots & \frac{1}{30}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2} \\
\cdots & \frac{1}{18}\ \ 0\ 2\ 3 & \frac{1}{2}\ \ 1\ 1\ 2 & \cdots & \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2} \\
-\frac{1}{4}\ \ -1\ 1\ 2 & \cdots & \cdots & 1\ \ 0\ 0\ 1 & \frac{1}{2}\ \ 0\ 0\ 1 \\
-\frac{1}{8}\ \ -1\ 1\ 2 & \frac{1}{30}\ \ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2} & \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\ \ 0\ 0\ 1 & \frac{1}{2}\ \ 0\ 0\ 1
\end{array}
$$

L'inverse, matrice des variances et covariances réduites, est représentée comme suit :

48 2 - 2 - 3	....	....	12 1 - 1 - 2	....
....	- 3600 1 - 3 - 4	- 720 0 - 2 - 3	- 240 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	480 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$
....	- 720 0 - 2 - 3	162 - 1 - 1 - 2	60 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	- 120 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$
12 1 - 1 - 2	- 240 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	60 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	29 0 0 - 1	- 50 0 0 - 1
....	480 $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$	- 120 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}$	- 50 0 0 - 1	100 0 0 - 1

On constate que la variance réduite de g_s, d'ailleurs égale à la variance réduite de g à une cote quelconque, est égale à la variance réduite de g_r trouvée dans la première application du IV, c'est-à-dire à la variance réduite de g minimale. Il faut toutefois remarquer que ce traitement n'a d'intérêt que si la valeur imposée à γ est plus exacte que celle qui serait déterminée par ajustement.

VI.- RETOUR AU CAS DE SIX PARAMETRES

Si la valeur du gradient est imposée, on peut envisager d'ajuster deux coefficients de traînée, l'un, ϕ_1, valable en montée et l'autre, ϕ_2, valable en descente, soit au total six paramètres. J'adopte l'ordre suivant : g_s, ϕ_1, ϕ_2, t_s, z_o et δ. Par rapport au III, ϕ_1 remplace ϕ et ϕ_2 remplace γ. Les dérivées partielles $w_{2,p}$ et $w_{3,p}$ prennent les nouvelles valeurs suivantes (pour chacune, la première valeur est valable en montée et la seconde en descente) :

$$w_{2,p} = \frac{\partial e_p}{\partial \phi_1} = -\frac{1}{6} g_s (t_p - t_s)^3 \quad \text{ou} \quad 0 \,;$$

$$w_{3,p} = \frac{\partial e_p}{\partial \phi_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{6}\, g_s (t_p - t_s)^3.$$

Seize éléments de la matrice **M** sont inchangés, ce sont ceux dont les indices de ligne et de colonne sont tous les deux différents de 2 et de 3, c'est-à-dire $m_{1,1}$, $m_{4,4}$, $m_{5,5}$, $m_{6,6}$, $m_{4,5}$, $m_{5,4}$, $m_{5,6}$, $m_{6,5}$, $m_{4,6}$, $m_{6,4}$, $m_{1,4}$, $m_{4,1}$, $m_{1,5}$, $m_{5,1}$, $m_{1,6}$ et $m_{6,1}$. En revanche, 20 éléments, ceux dont l'indice de ligne ou l'indice de colonne (ou les deux) est égal à 2 ou à 3, doivent être recalculés :

$$m_{2,2} = \frac{1}{36}\, g_s^{\,2}\, \Sigma_1\, (t_p - t_s)^6 = \frac{1}{288}\, g_s^{\,-1}\, d^3\, n^4\,;$$

$$m_{3,3} = \frac{1}{36}\, g_s^{\,2}\, \Sigma_2\, (t_p - t_s)^6 = m_{2,2}\,;$$

$$m_{1,2} = m_{2,1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}\, g_s\, \Sigma_1\, (t_p - t_s)^5 = \frac{1}{84}\, g_s^{\,-3/2}\, d^{5/2}\, n^{7/2}\,;$$

$m_{2,3} = m_{3,2} = 0$, du fait que soit $w_{2,p} = 0$, soit $w_{3,p} = 0$;

$$m_{3,4} = m_{4,3} = \frac{1}{6}\, g_s^{\,2}\, \Sigma_2\, (t_p - t_s)^4 = \frac{1}{36}\, d^2\, n^3\,;$$

$$m_{1,3} = m_{3,1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} g_s \, \Sigma_2 \, (t_p - t_s)^5 = - m_{1,2} = -\frac{1}{84} g_s^{-3/2} \, d^{5/2} \, n^{7/2} \, ;$$

$$m_{2,4} = m_{4,2} = \frac{1}{6} g_s^{\,2} \, \Sigma_1 \, (t_p - t_s)^4 = m_{3,4} \, ;$$

$$m_{3,5} = m_{5,3} = \frac{1}{6} g_s \, \Sigma_2 \, (t_p - t_s)^3 = \frac{1}{30} g_s^{-1/2} \, d^{3/2} \, n^{5/2} \, ;$$

$$m_{2,5} = m_{5,2} = \frac{1}{6} g_s \, \Sigma_1 \, (t_p - t_s)^3 = - m_{3,5} = -\frac{1}{30} g_s^{-1/2} \, d^{3/2} \, n^{5/2} \, ;$$

$$m_{3,6} = m_{6,3} = \frac{1}{6} g_s \, \Sigma_2 \, (t_p - t_s)^3 = m_{3,5} \, ;$$

$m_{2,6} = m_{6,2} = 0$, du fait que soit $w_{2,p} = 0$, soit $w_{6,p} = 0$.

La matrice **M** est donc représentée comme suit, de façon abrégée (coefficient numérique, exposants de g_s, d et n) :

$\frac{1}{12}\ -2\ 2\ 3$	$\frac{1}{84}\ -\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$	$-\frac{1}{84}\ -\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$	....	$-\frac{1}{4}\ -1\ 1\ 2$	$-\frac{1}{8}\ -1\ 1\ 2$
$\frac{1}{84}\ -\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$	$\frac{1}{288}\ -1\ 3\ 4$	....	$\frac{1}{36}\ 0\ 2\ 3$	$-\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$	....
$-\frac{1}{84}\ -\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$	....	$\frac{1}{288}\ -1\ 3\ 4$	$\frac{1}{36}\ 0\ 2\ 3$	$\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$	$\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$
....	$\frac{1}{36}\ 0\ 2\ 3$	$\frac{1}{36}\ 0\ 2\ 3$	$\frac{1}{2}\ 1\ 1\ 2$	....	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}$
$-\frac{1}{4}\ -1\ 1\ 2$	$-\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$	$\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$	....	$1\ 0\ 0\ 1$	$\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1$
$-\frac{1}{8}\ -1\ 1\ 2$	....	$\frac{1}{30}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1$	$\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1$

Les triplets (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \dots 6$ donnés en III sont inchangés sauf pour $i = 3$. On a maintenant $(a_3, b_3, c_3) = (a_2, b_2, c_2) = (-1/2, 3/2, 2)$. La suite du raisonnement est inchangée. Après inversion de la matrice numérique **N**, on peut écrire, sous forme abrégée, la matrice $\mathbf{M}^{-1}$, matrice des variances et covariances réduites ; c'est :

$2352\ \ 2\ \ -2\ \ -3$	$-6720\ \ \frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}\ -\frac{7}{2}$	$6720\ \ \frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}\ -\frac{7}{2}$	....	$140\ \ 1\ \ -1\ \ -2$	....
$-6720\ \ \frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}\ -\frac{7}{2}$	$23200\ \ 1\ \ -3\ \ -4$	$-16000\ \ 1\ \ -3\ \ -4$	$-720\ \ 0\ \ -2\ \ -3$	$-\frac{1840}{3}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$480\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$
$6720\ \ \frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}\ -\frac{7}{2}$	$-16000\ \ 1\ \ -3\ \ -4$	$23200\ \ 1\ \ -3\ \ -4$	$-720\ \ 0\ \ -2\ \ -3$	$\frac{400}{3}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$480\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$
....	$-720\ \ 0\ \ -2\ \ -3$	$-720\ \ 0\ \ -2\ \ -3$	$162\ \ -1\ \ -1\ \ -2$	$60\ \ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}$	$-120\ \ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}$
$140\ \ 1\ \ -1\ \ -2$	$-\frac{1840}{3}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$\frac{400}{3}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$60\ \ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}$	$\frac{325}{9}\ \ 0\ \ 0\ \ -1$	$-50\ \ 0\ \ 0\ \ -1$
....	$480\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$480\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{5}{2}$	$-120\ \ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}$	$-50\ \ 0\ \ 0\ \ -1$	$100\ \ 0\ \ 0\ \ -1$

Je rappelle que les paramètres ajustés sont, dans l'ordre, g_s, ϕ_1, ϕ_2, t_s, z_o et δ.

En comparant ces résultats à ceux obtenus en IV, on voit que la variance réduite de g_s a été multiplié par 49 et que la variance réduite de ϕ_1 (égale à celle de ϕ_2) est supérieure à celle de ϕ. Il ne faut pas oublier, toutefois, que cette variance réduite doit être multipliée par la variance d'une observation $\sigma_1{}^2$ qui dépend directement des écarts résiduels. La méthode envisagée ici (ajustement simultané de deux coefficients de traînée) ne doit donc être retenue que si elle conduit à une réduction substantielle des écarts résiduels.

VII.- CAS OU L'ON NE TRAITE PAS TOUTES LES OBSERVATIONS

Afin de diminuer la durée du traitement, ce qui permet, par exemple, d'augmenter la fréquence des lancers, on a envisagé de ne traiter que les observations qui concernent une proportion r des stations. On peut montrer que, r étant fixé, il convient de traiter, en début de montée, en fin de montée, en début de descente et en fin de descente, des nombres égaux d'observations ; la valeur commune de ces nombres est l'entier le plus proche de

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{n}{2} .$$

Dans ces conditions, les intégrales définies introduites en III,

$$\int_{o}^{n/2} x^{k/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{k}{2}+1} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} ,$$

doivent être remplacées par

$$\int_{o}^{\frac{r}{2}\cdot\frac{n}{2}} x^{k/2}\,\mathrm{d}x + \int_{(1-\frac{r}{2})\cdot\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} x^{k/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{k}{2}+1} \left[\left(\frac{r}{2}\cdot\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} + \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} - \left(\left\{1-\frac{r}{2}\right\}\cdot\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{k}{2}+1} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} f(r, k) ,$$

$$\text{avec } f(r,k) = 1 + \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} - \left(1-\frac{r}{2}\right)^{\frac{k}{2}+1} ,$$

c'est-à-dire qu'elles doivent être multipliées par le facteur numérique $f(r,k)$.

Les autres facteurs, qui permettent de passer de ces intégrales aux termes $m_{i,j}$ de la matrice **M**, étant inchangés, la matrice **C** est inchangée et les termes de la nouvelle matrice **N** s'obtiennent en multipliant ceux de l'ancienne par $f(r,k)$. Les valeurs de k à utiliser sont rappelées dans les tableaux suivants :

Cas de l'ajustement de

g_s, ϕ, γ, t_s, z_o et δ

(voir III et IV)

4	....	6	....	2	2
....	6	....	4	....	3
6	....	8	....	4	4
....	4	....	2	....	1
2	....	4	....	0	0
2	3	4	1	0	0

Cas de l'ajustement de

g_s, ϕ, t_s, z_o et δ

(voir V)

4	....	....	2	2
....	6	4	....	3
....	4	2	....	1
2	....	....	0	0
2	3	1	0	0

Cas de l'ajustement de

g_s, ϕ_1, ϕ_2, t_s, z_o et δ

(voir VI)

$$
\begin{matrix}
4 & 5 & 5 & .... & 2 & 2 \\
5 & 6 & .... & 4 & 3 & .... \\
5 & .... & 6 & 4 & 3 & 3 \\
.... & 4 & 4 & 2 & .... & 1 \\
2 & 3 & 3 & .... & 0 & 0 \\
2 & .... & 3 & 1 & 0 & 0
\end{matrix}
$$

Une fois la nouvelle matrice N calculée, on l'inversera pour obtenir les coefficients numériques de la nouvelle matrice des variances et covariances réduites, dans laquelle les exposants de g_s, d et n sont inchangés. Moyennant plusieurs essais effectués au moyen d'un programme d'ordinateur très simple, on pourrait ainsi optimiser la valeur de r.

VIII.- CONCLUSION

La méthode qui vient d'être exposée et qui permet d'établir *a priori* les formules donnant les variances et covariances réduites des paramètres ajustés repose essentiellement sur la possibilité d'exprimer la matrice **M** comme le produit **C** $\times$ **N** $\times$ **C**, la matrice **C** étant diagonale, donc immédiatement inversible, et la matrice **N**, numérique, étant indépendante des valeurs des paramètres descriptifs de l'expérience choisis et donc inversible "une fois pour toutes", du moins pour un type d'expérience donné.

Or, cette propriété n'est pas spéciale à la mesure de l'accélération due à la pesanteur, elle est une conséquence directe de la méthode des moindres carrés qui conduit, pour le terme général m_{ij} de la matrice **M**, à l'expression rappelée en II,3. Cette méthode est donc plus générale que ce que la présente étude pourrait laisser supposer ; elle devrait être applicable à de nombreux autres problèmes de détermination de paramètres par ajustement.

Février 1991.