
UNE NOUVELLE FAÇON D'APPLIQUER
LA MÉTHODE DES EXCÉDENTS FRACTIONNAIRES

par P. Carré

Rapport BIPM-85/6

La méthode dite ici "des coïncidences", et plutôt appelée méthode des excédents fractionnaires, permet de trouver une différence de marche δ connaissant sa borne inférieure δ' , sa borne supérieure δ'' et les excédents fractionnaires f'_i observés au moyen d'interférences réalisées avec n radiations monochromatiques de longueurs d'onde λ_i ($1 < i < n$). Chacun des excédents fractionnaires vrais f_i est tout simplement la partie fractionnaire (excès sur l'entier immédiatement inférieur ou égal) de l'ordre d'interférence q_i correspondant à la longueur d'onde λ_i .

On a, en introduisant le nombre d'ondes $\sigma_i = 1/\lambda_i$,
 $q_i = \delta/\lambda_i = \delta \sigma_i$
et $f_i = q_i - p_i$
avec $p_i = E(q_i)$ (partie entière de q_i).

La méthode habituelle consiste à admettre que, pour l'une des radiations (que je supposerai être celle à laquelle on a attribué l'indice 1), on a $f_1 = f'_1$. On a donc

$q_1 = p_1 + f'_1$, mais p_1 est inconnu : on ne connaît que ses limites p'_1 et p''_1 telles que
 $p'_1 - 1 + f'_1 < \delta' \sigma_1 \leq p'_1 + f'_1$
et $p''_1 + f'_1 \leq \delta'' \sigma_1 < p''_1 + 1 + f'_1$.

Pour toutes les valeurs de p_1 telles que
 $p'_1 \leq p_1 \leq p''_1$

et toutes les valeurs de i telles que
 $2 \leq i \leq n$,

on calcule q_i , à l'aide des relations

$\delta = q_1/\sigma_1$ et $q_i = \delta \sigma_i$
soit $q_i = q_1 \cdot \sigma_i/\sigma_1$.

On peut écrire

$$q_i = E(q_i) + f''_i ;$$

f''_i est l'excédent fractionnaire "calculé" que l'on compare à l'excédent fractionnaire observé f'_i . On trouve généralement une valeur de p_1 telle que tous les f''_i "coïncident" approximativement avec les f'_i , c'est-à-dire que les "écarts" entre les f'_i et les f''_i sont "acceptables". La valeur de p_1 ainsi retenue fournit pour δ l'estimation $(p_1 + f'_1)\lambda_1$.

En adoptant, pour les $n - 1$ autres radiations, comme ordre d'interférence, le nombre $p'_i + f'_i$ dont la partie fractionnaire est égale à l'excédent fractionnaire observé et qui est le plus proche possible de l'ordre d'interférence calculé, on obtient $n - 1$ autres estimations de δ , à savoir $(p'_i + f'_i)\lambda_i$. (On a en général $p'_i = p_i$, avec $p_i = E(q_i)$; mais, si l'une des grandeurs f'_i ou f''_i est proche de 0 et l'autre proche de 1, on a $p'_i = p_i + 1$ ou $p'_i = p_i - 1$.) Ensuite, on combine comme on le désire ces n estimations.

Divers critères peuvent être utilisés pour choisir la "bonne" valeur de p_1 : toutes les valeurs absolues des "écarts" sont inférieures à un seuil ; la somme de ces valeurs absolues est inférieure à un seuil ; cette somme est la plus petite possible ; la somme des carrés des écarts est inférieure à un seuil ; cette somme est la plus petite possible ; etc. De toute façon, l'écart est toujours nul pour la radiation prise comme référence (ici, la première). Cette radiation joue, à l'évidence, un rôle particulier.

Or, il est possible d'imaginer une méthode qui ne particularise aucune radiation. Cette méthode a été développée à l'occasion de la mise en service des nouveaux ordinateurs du BIPM.

L'idée est de calculer les écarts (entre les ordres d'interférence observés et les ordres d'interférence calculés) sur tout l'intervalle $[\delta', \delta'']$, de former une "fonction-critère" de ces écarts et de rechercher la valeur de δ qui correspond au minimum absolu de cette fonction. Cela appelle deux remarques. D'abord, "sur tout l'intervalle" veut peut-être dire "en des points très rapprochés" (chaque nanomètre, par exemple) ; ces points risquent d'être fort nombreux. Ensuite, les écarts en question font intervenir une grandeur (l'ordre d'interférence observé) dont on ignore la partie entière. On doit supposer que celle-ci est telle que l'écart en question soit compris entre $-0,5$ et $+0,5$. L'expression de cet écart est

$$e_i = f'_i - \delta \sigma_i - E(f'_i - \delta \sigma_i + 0,5).$$

En effet, le deuxième terme de cette expression est un entier de sorte que la partie fractionnaire de e_i est la même que celle de $f'_i - \delta \sigma_i$. Par ailleurs, on a, quel que soit x ,

$$x \geq E(x) > x - 1$$

ou $-x \leq -E(x) < -x + 1$

d'où, en ajoutant $x - 0,5$

$$-0,5 \leq x - 0,5 - E(x) < +0,5.$$

En remplaçant x par $f'_i - \delta \sigma_i + 0,5$, on voit immédiatement que l'on obtient une valeur de e_i dans l'intervalle $[-0,5, +0,5[$.

Cette fonction de δ présente des discontinuités de $+1$ pour toute valeur de δ telle que $f'_i - \delta \sigma_i$ soit demi-entier. Entre ces discontinuités, sa dérivée est constante :

$$de_i/d\delta = -\sigma_i.$$

Entre deux discontinuités, qui le font passer de $-0,5$ à $+0,5$, chaque e_i décroît donc linéairement de $+0,5$ à $-0,5$ sur un intervalle de $1/\sigma_i$ ($= \lambda_i$).

Envisageons de prendre comme fonction-critère la somme pondérée des valeurs absolues des écarts :

$$g = \sum_i w_i |e_i|.$$

Il est commode d'écrire $|e_i|$ sous la forme $\varepsilon_i e_i$ avec $\varepsilon_i = -1$ si $e_i < 0$ et $\varepsilon_i = +1$ si $e_i \geq 0$.

$$\text{On a alors } d|e_i|/d\delta = \varepsilon_i de_i/d\delta = -\varepsilon_i \sigma_i.$$

La fonction g ne présente pas de discontinuité puisque la valeur absolue d'une fonction continue est continue et que, lors de ses discontinuités, e_i change seulement de signe. En revanche, sa dérivée en présente une chaque fois qu'un e_i passe par 0 (en décroissant) puisqu'alors $d(w_i |e_i|)/d\delta$ passe de $-w_i \sigma_i$ à $+w_i \sigma_i$, et chaque fois qu'un e_i passe de $-0,5$ à $+0,5$ puisqu'alors $d(w_i |e_i|)/d\delta$ passe de $+w_i \sigma_i$ à $-w_i \sigma_i$.

Un minimum, et en particulier le minimum absolu, ne peut être obtenu qu'en un point anguleux du premier type, c'est-à-dire lorsqu'un e_i passe par 0. La valeur à adopter pour δ serait donc toujours une valeur qui donne un écart nul pour une radiation, sans que l'on puisse prévoir laquelle et sans que les autres n'interviennent sur cette valeur.

Par ailleurs, on constate qu'entre ses points de discontinuité, la dérivée de g s'écrit $dg/d\delta = -\sum_i \varepsilon_i w_i \sigma_i$.

En prenant $w_i = \lambda_i$, elle se réduit à $-\sum_i \varepsilon_i$. Elle est donc nulle dans un domaine fini si n est pair et si les ε_i valent -1 pour $n/2$ radiations et $+1$ pour les $n/2$ autres. Si cela se produit pour la plus petite valeur possible de g , la valeur à adopter pour δ est indéterminée.

Cela nous conduit à rejeter g comme fonction-critère.

Prenons maintenant la somme pondérée des carrés des écarts :

$$h = \sum_i w_i e_i^2.$$

$$\text{On a } de_i^2/d\delta = 2 e_i de_i/d\delta = - 2e_i\sigma_i.$$

La fonction h ne présente pas de discontinuité puisque, lors de ses discontinuités, e_i change seulement de signe.

Entre les points de discontinuité de e_i , les deux premières dérivées de h s'écrivent

$$dh/d\delta = - 2 \sum_i w_i e_i \sigma_i$$

$$\text{et } d^2h/d\delta^2 = 2 \sum_i w_i \sigma_i^2.$$

La courbe représentative de h est constituée d'arcs de parabole ayant tous la même courbure ; dans le cas habituel où tous les w_i sont positifs, la concavité de ces arcs de parabole est tournée vers les h positifs. On passe de chacun au suivant aux points de discontinuité de la dérivée première (un e_i , soit e_k , est demi-entier) sans discontinuité de la fonction mais avec une discontinuité de la pente de $- 2 w_k \sigma_k$.

On a donc une connaissance complète de la fonction en déterminant les valeurs successives de δ telles qu'un e_i soit demi-entier (soit e_k). La pente est

$$- 2 \sum_{i \neq k} w_i e_i \sigma_i + w_k \sigma_k \text{ à gauche et } - 2 \sum_{i \neq k} w_i e_i \sigma_i - w_k \sigma_k \text{ à droite.}$$

On définit ainsi des domaines successifs. Dans tout domaine où la pente est négative à l'origine et positive à l'extrémité, il y a un minimum relatif dont on peut calculer la position de façon très simple en utilisant la linéarité de la variation de la pente, c'est-à-dire par une interpolation linéaire. On obtiendra sa valeur par un calcul direct de $\sum_i w_i e_i^2$. Il est facile, ensuite, de trouver la position du plus petit minimum (minimum absolu). C'est la valeur de δ cherchée.

Finalement, on peut dire que, dans la méthode classique, on étudie une fonction-critère plus ou moins bien définie, en un certain nombre de points isolés, alors que la méthode exposée ici donne une connaissance complète de la fonction-critère moyennant une étude en un nombre de points n fois plus grand (n étant le nombre de radiations).

Il reste un point à éclaircir : quelle relation existe-t-il entre la différence de marche δ ainsi trouvée et les n estimations δ_i données par la méthode habituelle ?

Le δ trouvé satisfait à $\sum_i w_i e_i \sigma_i = 0$.

Dans la méthode habituelle, le δ_i fourni par la radiation i correspond à un écart nul. Comme $de_i/d\delta = -\sigma_i$, soit $d\delta = -de_i/\sigma_i$, on a $\delta_i - \delta = e_i/\sigma_i$ ou $\delta_i = \delta + e_i/\sigma_i$.

Calculons une moyenne pondérée des δ_i , avec des poids w'_i tels que l'on retrouve δ . Cela donne immédiatement

$$\sum_i w'_i e_i/\sigma_i = 0.$$

Une relation suffisante entre les deux systèmes de poids est donc

$$w_i \sigma_i = \frac{w'_i}{\sigma_i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Des poids égaux dans la méthode nouvelle donnent le même résultat que la méthode classique appliquée avec des poids proportionnels aux carrés des nombres d'onde.

Des poids égaux dans la méthode classique donnent le même résultat que la nouvelle méthode appliquée avec des poids proportionnels aux carrés des longueurs d'onde.

Juin 1985
