

Statistiques de comptage

par J.W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

Dans la première partie, nous mentionnerons quelques compléments au principe de la méthode d'échantillonnage sélectif, décrit précédemment. Ces résultats sont d'une utilité directe. Une approche plus théorique s'impose pour le deuxième sujet abordé, où l'on cherche une solution mathématique à un problème soulevé par l'exploitation de mesures. Ce chevauchement de théorie et pratique, qui est typique pour ce domaine, illustre bien comment l'approche choisie doit s'adapter à la nature du problème à résoudre.

Quelques développements concernant l'échantillonnage sélectif

La nouvelle méthode, appelée "échantillonnage sélectif", pour la mesure de l'activité de nucléides qui se désintègrent par l'émission de plusieurs rayonnements (par exemple d'une particule bêta suivie d'un rayon gamma) s'est déjà avérée très utile (voir Nucl. Instr. and Meth. 189 (1981), 449). Elle se distingue de la technique habituelle des coïncidences par la mesure directe de l'efficacité d'un compteur (normalement ε_{β}) sans faire appel à un circuit de coïncidences. Un certain nombre de corrections, qui se révèlent souvent difficiles à évaluer à des taux de comptage élevés, peuvent ainsi être évitées. De plus, elle s'applique aussi à des nucléides dont les rayonnements émis dans une seule désintégration ne sont plus strictement simultanés.

Parmi les inconvénients qu'il a fallu d'abord accepter en utilisant cette approche, on doit mentionner la relative lenteur des mesures qui résulte du principe même d'une sélection: il faut attendre l'apparition d'une lacune temporelle dans la suite des émissions bêta d'une durée minimale T avant de pouvoir commencer un nouveau cycle d'enregistrement. Cette perte dans l'acquisition par rapport à un comptage continu est inévitable, mais pas trop gênante. Elle augmente avec le taux mesuré, mais est partiellement compensée par l'abondance des impulsions comptées pendant les périodes d'enregistrement. Or, c'est plutôt un problème technique qui limitait l'utilité pratique de la méthode. Il est dû au fait que les impulsions arrivent à un rythme trop élevé pour être classées dans les canaux d'un sélecteur multicanal, utilisé en mode multiéchelle. Il est donc nécessaire de les stocker provisoirement dans des mémoires à accès rapide d'où elles sont ensuite transférées au sélecteur à une vitesse convenable. Puisque ce transfert est très lent (environ 15 μ s par canal) par rapport à l'enregistrement, on a intérêt

à l'effectuer aussi rarement que possible. C'est cette idée qu'exploite le nouveau "convertisseur de vitesse" construit par P. Bréonce, qui ne transfère l'ensemble des enregistrements que si le contenu maximal d'un canal atteint un nombre prédéterminé, qui peut aller jusqu'à 255. Ainsi, l'opération de transfert "par paquet" se fait si rarement que sa durée est pratiquement négligeable par rapport au temps total des enregistrements. Il est même possible d'effacer électroniquement le contenu des canaux correspondant aux "coïncidences" avec les impulsions qui déclenchent les cycles, car cette région n'est normalement pas exploitée. Puisque ce sont ces canaux qui se remplissent le plus vite, l'opération de transfert se fait encore moins souvent. Pour une largeur habituelle des canaux de 0,5 μ s, on gagne donc environ un facteur 30 dans la durée de mesure par rapport à la version ancienne. Grâce à cette amélioration technique, l'échantillonnage sélectif devient compétitif avec la méthode des coïncidences, même sur le plan de l'efficacité.

Un autre changement intervenu récemment concerne le choix des impulsions bêta destinées à déclencher un nouveau cycle d'enregistrement. Il en résulte également un gain pour l'efficacité de la méthode qui n'est pas négligeable. On pourrait penser que l'utilisation de la première impulsion bêta disponible après le temps mort T cumulatif représente un choix "au hasard" garantissant que les intervalles de temps qui l'entourent sont aussi de durée aléatoire. En fait, ce n'est pas le cas. Si le moment où l'on est prêt à enregistrer un nouveau cycle est choisi au hasard, il tombe de préférence dans un intervalle de temps t (dont l'ensemble est décrit par la densité $f(t)$) qui est long, car la nouvelle densité n'est pas seulement proportionnelle à $f(t)$, mais aussi à t . Par conséquent, la densité de l'intervalle qui précède le début d'un cycle proprement dit est donnée par (voir BIPM WPN-221)

$$g(t) = \frac{t f(t)}{\int_0^{\infty} t f(t) dt} .$$

Pour un temps cumulatif de durée T, il en résulte

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t \leq T, \\ \rho^2 t e^{-2\rho T} & \text{" } T < t \leq 2T, \text{ etc.} \end{cases}$$

Comme le retard inséré dans la voie gamma permet aussi d'enregistrer les impulsions arrivant avant le déclenchement d'un cycle, c'est bien à $g(t)$ que correspond l'accumulation des événements corrélés dans la zone de 0 à $-2T$. L'enregistrement reproduit dans la Fig. la confirme ce raisonnement. Il est clair que cet effet nous empêche de mesurer G dans l'intervalle qui va de $-2T$ à $-T$. Deux remèdes peuvent être envisagés à cette situation: ou bien on décale la zone perturbée "à gauche" en se servant, au lieu de la première, d'une impulsion ultérieure (l'emploi de la deuxième, par exemple, garantit déjà que le domaine de $2T$ à $-T$ est utilisable pour une mesure de G, voir Fig. 1b), ou l'on continue à se servir de la première impulsion, mais G est alors déterminé à l'aide de l'enregistrement après la lacune (temps positif).

Puisque cette deuxième option permet une accélération importante de l'enregistrement, nous l'utilisons maintenant de préférence (sauf pour les transitions isomères). Notons que le domaine servant à la détermination de g n'est pas affecté par le choix de l'impulsion qui déclenche un cycle.

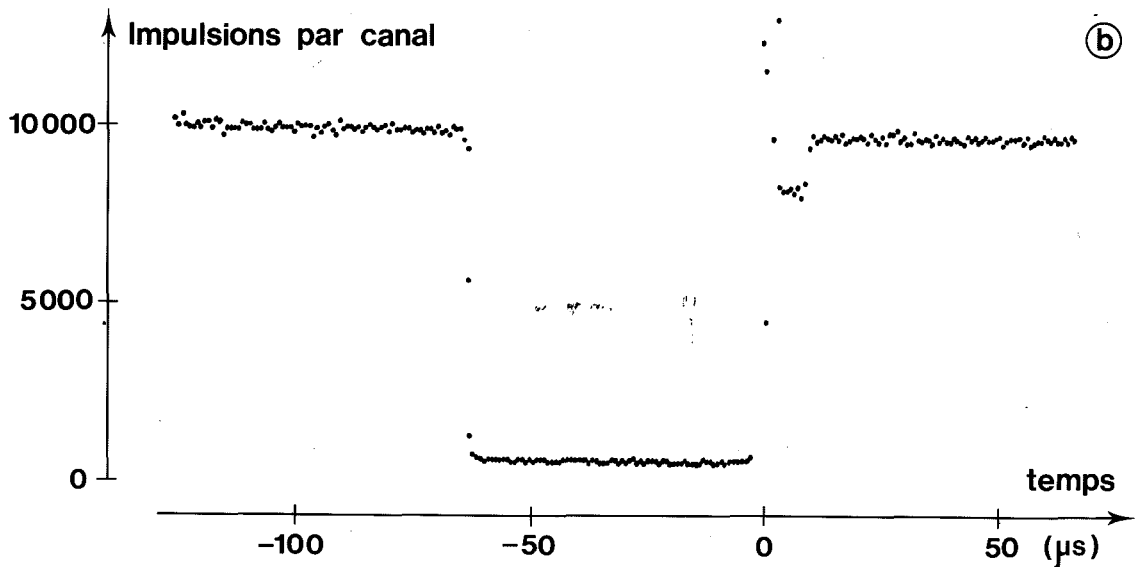
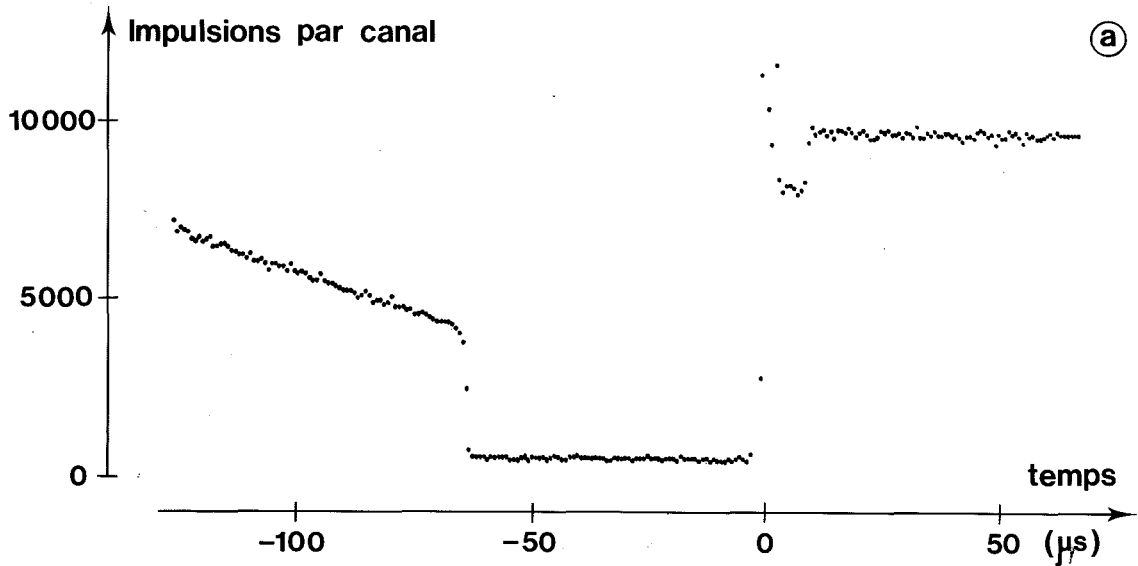


Fig. 1.- Répartition temporelle des impulsions gamma d'une source de ^{60}Co . Le déclenchement d'un cycle d'enregistrement se fait à l'aide de la première (a) ou de la deuxième (b) impulsion disponible. Durée approximative de l'enregistrement: pour (a) 30 min, pour (b) 45 min; activité de la source: environ 15 kBq.

Une autre étude récente concerne la manière exacte de tenir compte du mouvement propre dans cette méthode. Puisque cette correction est normalement peu critique, on se contentera d'indiquer le résultat (pour plus de détails, voir BIPM WPN-223). Désignons les taux de comptage du mouvement propre pour les trois voies habituelles par B_β , B_γ et B_c . Il importe de mentionner que la mesure de B_c , qui correspond à la fréquence de paires d'impulsions bêta et gamma provenant de la même désintégration, ne nécessite pas un circuit à coïncidences, mais se détermine par un enregistrement usuel d'échantillonnage sélectif. Pour une transition isomère, ce procédé est obligatoire. Si l'on note, comme d'habitude, par G et g le nombre moyen d'impulsions accumulées par canal dans les deux zones d'enregistrement, la détermination de l'efficacité du compteur bêta est donnée par l'expression

$$\varepsilon_\beta = 1 - \frac{g - (B_\gamma - B_c)/k}{G - B_\gamma/k},$$

où la constante $k = N_\gamma/G$, qui se mesure directement, permet de comparer contenu de canaux et taux de comptage. En l'absence d'un mouvement propre, la formule se réduit à la relation habituelle $g/G = 1 - \varepsilon_\beta$.

Taux de comptage originel pour un temps mort cumulatif

On sait depuis fort longtemps qu'un processus de Poisson, avec taux de comptage ρ , est perturbé par l'insertion d'un temps mort cumulatif, de durée τ , de façon à ce que son taux soit réduit à

$$R = \rho e^{-\rho\tau}.$$

Avec les abréviations $\rho\tau = x$ et $R\tau = z$, on écrit aussi $z = x e^{-x}$ (voir Fig. 2).

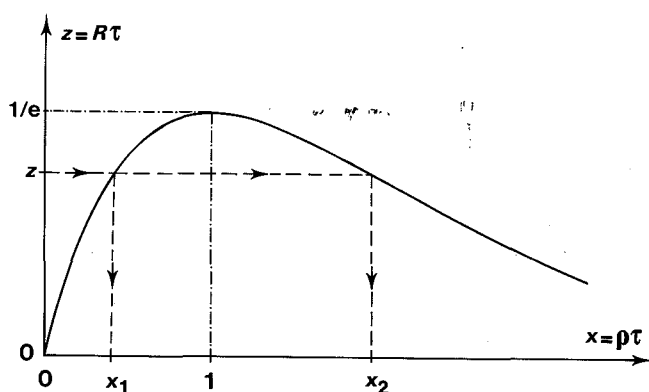


Fig. 2.- Comportement du taux de comptage R à la sortie d'un temps mort cumulatif τ en fonction du taux initial ρ . x_1 et x_2 correspondent aux deux solutions possibles pour une valeur donnée de z .

Dans la pratique, cependant, on veut plutôt déterminer ρ (ou x) à partir de R (ou z). Cette inversion, d'apparence si simple, se heurte à des difficultés qui ne sont toujours pas maîtrisées de façon tout à fait satisfaisante. Quelques progrès sont néanmoins à signaler.

Il est évident qu'une solution purement numérique est toujours possible par approximations successives, mais elle ne peut pas remplacer dans tous les cas une solution analytique, en particulier une qui donne à la fois les valeurs x_1 et x_2 . On connaît une expression exacte pour x_1 (BIPM WPN-217); elle est utile surtout pour des petites valeurs de z , mais la convergence devient très lente si z tend vers $1/e$.

Esquissons brièvement une nouvelle approche au vieux problème qui consiste à trouver les deux solutions x_1 et x_2 (pour plus de détails, voir Rapport BIPM-82/7). Avec la variable $X = 1 - x$, la relation de base $z = x e^{-x}$ s'exprime par

$$\ln z = \ln(1 - X) - (1 - X) = -1 - \left(\frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \frac{X^4}{4} + \dots \right),$$

ou aussi par

$$\begin{aligned} Y^2 &\equiv -2(1 + \ln z) \\ &= X^2 \left(1 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{2}{5}X^3 + \dots \right) \equiv X^2 S^2. \end{aligned}$$

A partir de

$$S^2 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j X^j, \quad \text{avec } a_j = \frac{2}{j+2},$$

on peut déterminer sa racine carrée

$$S = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j X^j,$$

où les coefficients b_j s'évaluent à l'aide des a_j par récurrence. Les premières valeurs sont $b_1 = 1/3$, $b_2 = 7/36$, $b_3 = 73/540$, $b_4 = 1331/12960$, etc.

Pour Y on a donc le développement

$$Y = X \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j X^j \right),$$

dont l'inversion pour X donne lieu à une série en puissances de Y de la forme

$$X = Y \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j Y^j \right).$$

A l'aide de formules connues (mais compliquées), on peut déterminer les coefficients c_j dont les premiers sont

$$c_1 = -1/3, \quad c_2 = 1/36, \quad c_3 = 1/270, \quad c_4 = 1/4\ 320.$$

Les valeurs numériques exactes ont été évaluées jusqu'à c_8 , mais malheureusement il n'a pas été possible d'en déduire une expression générale pour c_j .

Pour la première des solutions recherchées, on a $x_1 = 1 - X < 1$, mais comment trouver x_2 ? Si, au lieu de choisir X , on avait pris $X' = x - 1 = -X$ comme nouvelle variable, on serait arrivé au même développement que pour X , mais avec des coefficients $c'_j = (-1)^j c_j$, et l'on peut alors admettre l'identification $x_2 = 1 + X' > 1$. Il s'ensuit que les deux solutions sont données essentiellement par le même développement en puissances de Y car on a maintenant

$$x_{1,2} \cong 1 \mp Y - \sum_{j=1}^{10} c_j (\pm Y)^{j+1}, \quad \text{où } Y = \sqrt{-2(1 + \ln z)}.$$

Evidemment, l'utilité d'une telle série dépend de la rapidité de sa convergence. Il se trouve qu'elle est excellente pour le domaine qui nous intéresse le plus, c'est-à-dire là où les deux valeurs possibles pour le taux de comptage originel se rapprochent et pourraient être confondues. Avec les valeurs numériques des coefficients c_j indiqués dans le Tableau I, les deux solutions x_1 et x_2 se déterminent à mieux que 10^{-6} pour $R\tau > 0,15$, ce qui est largement suffisant pour toutes les applications.

TABLEAU I

Liste des coefficients c_j à utiliser dans l'évaluation de x_1 et x_2

j	c_j	j	c_j
1	-0,333 333 33	6	-0,000 025 54
2	0,027 777 78	7	-0,000 004 90
3	0,003 703 70	8	-0,000 000 24
4	0,000 231 48	9	0,000 000 19
5	-0,000 058 79	10	0,000 000 08

Autres travaux

Les deux bibliographies, rassemblées dans le cadre du groupe de travail de la Section II du CCEMRI "Principes de la méthode des coïncidences", ont été terminées et distribuées. La première, sur les effets dus au chevauchement d'impulsions (Rapport BIPM-81/10), comporte 170 références; la seconde, sur les effets de temps morts (Rapport BIPM-81/11), avec plus de 580 références, est la deuxième édition, fortement augmentée, d'une liste analogue éditée pour la première fois il y a six ans.

Deux petites notes traitent de sujets divers: dans BIPM WPN-219 on étudie la perturbation d'une série d'impulsions due à l'utilisation d'une fenêtre spectrale; dans BIPM WPN-220, on propose pour la méthode dite du maximum de vraisemblance une nouvelle approche pour contrôler la fiabilité d'un paramètre ainsi déterminé.

(Octobre 1982)