Premiers moments pour une source décroissante avec temps mort cumulatif

par Jörg W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 SEVRES

Parmi les problèmes relatifs à la mesure d'une source, effectuée pendant un temps total T sur un grand nombre de durées fixes t_o (donc par échantillonnage), nous avons déjà traité le cas où les émissions de cette source, pour laquelle on admet une décroissance exponentielle à vie moyenne $1/\lambda$, sont superposées d'un mouvement propre constant (à taux β) et où le dispositif de mesure introduit un temps mort τ. Contrairement à l'hypothèse utilisée précédemment d'un temps mort du type non cumulatif (voir BIPM WPN-212), celui-ci sera maintenant considéré comme cumulatif. On se contentera d'esquisser les raisonnements qui mènent aux résultats indiqués.

A tout moment t l'espérance momentanée du nombre k d'événements enregistrés dans t_o est

$$E_t(k) = \rho(t) \cdot t_o ,$$

où le taux de comptage observé est donné par l'expression

$$\rho(t) = (\beta + \rho_o \cdot e^{-\lambda t}) \cdot \exp\left[-(\beta + \rho_o \cdot e^{-\lambda t})\tau\right] , \quad \text{pour } \tau \ll \lambda^{-1} ,$$

avec ρ_o = taux de comptage non perturbé à t = 0, donc sans mouvement propre ni temps mort.

Pour l'ensemble de l'intervalle d'observation T, l'espérance de k est la moyenne

$$_\lambda E(k) = \frac{1}{T} \int_0^T E_t(k)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\beta\, t_o \cdot e^{-\beta\tau} \int_0^T \exp\left[-\rho_o\tau \cdot e^{-\lambda t}\right] dt + \rho_o\, t_o \int_0^T e^{-\lambda t} \cdot e^{-\beta\tau} \cdot \exp(-\rho_o\tau \cdot e^{-\lambda t})\, dt\right\} .$$

En utilisant les symboles

$$\mu_o = \rho_o t_o , \qquad b = \rho_o \tau , \qquad g = \beta t_o \qquad \text{et} \quad \eta = e^{-\beta\tau} ,$$

cette espérance prend la forme

$$E(k) = \frac{g\eta}{T} \cdot J_1(b) + \frac{\mu_o \eta}{T} \cdot J_2(1,b) \quad ,$$

où J_1 et J_2 désignent les intégrales

$$J_1(b) \equiv \int_0^T \exp(-b \cdot e^{-\lambda t})\, dt$$

et $$J_2(\alpha, b) \equiv \int_0^T \exp(-\alpha \cdot \lambda t - b \cdot e^{-\lambda t})\, dt \; .$$

L'évaluation de ces intégrales donne, avec $B = b \cdot e^{-\lambda T}$,

$$J_1(b) = \frac{1}{\lambda}\left\{E_1(B) - E_1(b)\right\} \quad \text{et} \quad J_2(\alpha, b) = \frac{1}{\lambda \cdot b^{\alpha}} \left\{\gamma(\alpha, b) - \gamma(\alpha, B)\right\}^{*} \; .$$

E_1 et γ sont respectivement la fonction exponentielle intégrale et la fonction gamma incomplète que nous avons rencontrées auparavant. Par conséquent, on peut aussi indiquer pour l'espérance mathématique de k la forme plus explicite (pour $\lambda \neq 0$ et $\tau \neq 0$)

$$_{\lambda}E(k) = \frac{\eta}{\lambda T}\left\{\frac{\mu_o}{b}(e^{-B} - e^{-b}) + g\left[E_1(B) - E_1(b)\right]\right\} .$$

L'évaluation de la variance de k est un peu plus longue, comme d'habitude. Nous nous contenterons de déterminer sa valeur asymptotique qui est, en bonne approximation (voir par exemple Rapport BIPM-77/1, Table 4), pour un temps mort τ cumulatif

$$V_t(k) = \rho_t \cdot t_o \cdot \frac{e^{\rho_t \tau} - 2\rho_t \tau}{e^{2\rho_t}} \; ,$$

où ρ_t est le taux de comptage avant le temps mort, donc

$$\rho_t = \beta + \rho_o \cdot e^{-\lambda t} \; .$$

---

* donc $J_2(1,b) = \frac{1}{\lambda b}(e^{-B} - e^{-b})$ et $J_2(2,b) = \frac{1}{\lambda b^2}\left\{(1+B)\cdot e^{-B} - (1+b)\cdot e^{-b}\right\}$.

En insérant ρ_t on obtient, après quelques transformations,

$$V_t(k) = g \left\{ \eta \cdot \exp(-\tilde{b}) - 2\,\eta^2 \beta\tau \cdot \exp(-2\tilde{b}) - 2\,\eta^2 b \cdot \exp(-\lambda t - 2\tilde{b}) \right\}$$
$$+ \mu_o \left\{ \eta \cdot \exp(-\lambda t - \tilde{b}) - 2\,\eta^2 \beta\tau \cdot \exp(-\lambda t - 2\tilde{b}) - 2\,\eta^2 b \cdot \exp(-2\lambda t - 2\tilde{b}) \right\} ,$$

avec $\tilde{b} = b \cdot e^{-\lambda t}$.

Comme précédemment, l'intégration sur la durée T s'effectue pour la variance à l'aide de la formule

$$_\lambda V(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ V_t(k) + E_t^2(k) \right\} dt - \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T E_t(k)\, dt \right\}^2 .$$

Cela nécessite l'évaluation des deux premières intégrales; la troisième n'est autre que $_\lambda E^2(k)$. Ce travail, assez fastidieux, est omis ici. Les résultats peuvent être exprimés à l'aide des fonctions J_1 et J_2. Ainsi, on trouve que

$$K_1 \equiv \int_0^T V_t(k)\, dt$$
$$= g\eta \left\{ J_1(b) - 2\eta\beta\tau \cdot J_1(2b) - 2\eta b \cdot J_2(1,2b) \right\}$$
$$+ \mu_o \eta \left\{ J_2(1,b) - 2\eta\beta\tau \cdot J_2(1,2b) - 2\eta b \cdot J_2(2,2b) \right\} ,$$

et
$$K_2 \equiv \int_0^T E_t^2(k)\, dt$$
$$= \eta^2 \left\{ g^2 \cdot J_1(2b) + 2\,\mu_o g \cdot J_2(1,2b) + \mu_o^2 \cdot J_2(2,2b) \right\} .$$

En rassemblant tous les termes on obtient pour la variance, après quelques arrangements, la formule

$$_\lambda V(k) = \frac{1}{T} \cdot K_1 + \frac{1}{T} \cdot K_2 - {}_\lambda E^2(k)$$
$$= {}_\lambda E(k) - {}_\lambda E^2(k) + J_1(2b) \cdot \frac{g\,\eta^2}{T} \,(g - 2\beta\tau)$$
$$+ J_2(1,2b) \cdot \frac{2\,\eta^2}{T} \,(\mu_o g - \mu_o \beta\tau - gb) + J_2(2,2b) \cdot \frac{\mu_o \eta^2}{T} (\mu_o - 2b) ,$$

ou aussi

$$_{\lambda}V(k) - \left[_{\lambda}E(k) - {}_{\lambda}E^2(k)\right] = \frac{\eta^2}{T}\left\{J_1(2b)\cdot\beta^2 + J_2(1,2b)\cdot 2\beta\rho_o + J_2(2,2b)\cdot\rho_o^2\right\}t_o(t_o - 2\tau) ,$$

où l'on peut insérer les expressions explicites pour J_1 et J_2 données plus haut.

En remarquant que $J_1(0) = T$ et $J_2(\alpha, 0) = \frac{1}{\alpha\lambda}(1 - e^{-\alpha\lambda T})$, il est facile de vérifier que pour $\tau = 0$, donc $b = 0$ et $\eta = 1$, on retrouve la formule établie antérieurement (Rapport BIPM-79/11, eq. 16) pour la variance en l'absence d'un temps mort.

(Octobre 1979)