Sur une éventuelle application des fractions continues

par J.W. Müller

Bureau International des Poids et Mesures, F-92310 Sèvres

1. Introduction au problème

La méthode des deux oscillateurs pour la mesure de temps morts est de plus en plus utilisée parce qu'elle est simple, rapide et précise. Une étude intéressante et très détaillée vient de lui être consacrée qui tient compte de la largeur des impulsions [1].

Pour tous ces raisonnements on commence traditionnellement par admettre que la densité des intervalles t qui résulte de la superposition de deux fréquences fixes ν_1 et $\nu_2 < \nu_1$ est donnée par une simple fonction continue, en l'occurrence une densité uniforme pour $0 < t < 1/\nu_1$ qui se termine par une fonction delta à l'endroit $t = 1/\nu_1$, si l'on néglige la largeur des impulsions.

Or, en acceptant ce point de départ (ou quelque chose d'équivalent), on fait implicitement deux hypothèses qui ne sont pas triviales et demandent quelques commentaires. On peut les énoncer, par exemple, en demandant que ν_1 et ν_2 soient dans un rapport irrationnel et que le temps disponible pour la mesure soit infiniment long. Ces deux hypothèses ont donc en commun d'être de nature plutôt mathématique. Tandis que la deuxième condition peut être raisonnablement approchée avec beaucoup de patience, la première se prête moins à un contrôle direct. Bien que les mathématiques nous affirment que la densité des nombres irrationnels est infiniment plus grande que celle des nombres rationnels et que l'on est donc quasiment sûr qu'un choix au hasard nous place dans le premier cas, il serait prématuré de se croire à l'abri de toute surprise.

En effet, une étude approfondie des problèmes liés à la précision de la valeur numérique pour un temps mort déterminé à l'aide de deux oscillateurs vient d'être faite par E. Carnal qui m'en a fort aimablement informé lors de ma récente visite à Lausanne, en mai 1977; les résultats seront publiés et feront suite à [1]. Aucun effort ne sera fait dans ce qui suit pour résumer cet excellent travail. Nous nous bornons à constater que d'après cette étude c'est la proximité du rapport ν_2/ν_1 à un nombre rationnel n_2/n_1 qui est en général déjà dangereuse, surtout si les entiers n_1 et n_2 ne sont pas très grands. Dans un tel cas, la répartition des intervalles entre impulsions successives, qui serait discontinue pour un rapport rationnel (une suite de fonctions delta), ne s'approche que difficilement d'une densité continue que l'on prend ordinairement comme point de départ. Si n_1 et l'écart du rapport des fréquences de n_2/n_1 sont connus, la théorie de Carnal permet de prévoir l'erreur maximale que l'on peut commettre dans la détermination habituelle du temps mort. En outre, cette incertitude ne dépend pas seulement du temps de mesure, mais aussi du moment de départ (phase entre les deux séries d'impulsions).

Dans l'application pratique, une partie décisive consiste donc à trouver les fractions rationnelles $F_k = n_2/n_1$ qui s'approchent le plus de $F = N_2/N_1$, où N_1 et N_2 sont les nombres d'impulsions provenant des deux oscillateurs et qui sont comptés pendant un temps de mesure donné. C'est pour ce problème partiel que nous allons proposer un simple algorithme.

2. Bref rappel concernant les fractions continues

Une partie classique de la théorie des nombres, dont les contributions fondamentales remontent à Euler, Lagrange et Lambert (pour ne citer que les plus connus), s'occupe d'expressions du type

$$F = b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}} ,$$

où a_k et b_k peuvent être des fonctions d'une variable x, par exemple. En partant de $F - b_o$ (que l'on confondra avec F), on voit que b_o peut être pris pour zéro, ce qui simplifie l'écriture de ce qui suit.

L'idée de base est d'approcher F par F_k, où l'on néglige les contributions d'ordre supérieur en posant $a_r = 0$ pour tout $r > k$. La série des coefficients peut être finie ou infinie (et périodique ou apériodique).

On obtient ainsi des approximations successives de F dont les premières sont

$$F_1 = \frac{a_1}{b_1} ,$$

$$F_2 = \frac{a_1 b_1}{b_1 b_2 + a_2} ,$$

$$F_3 = \frac{a_1 (b_2 b_3 + a_3)}{b_1 (b_2 b_3 + a_3) + a_2 b_3} , \quad \text{etc.}$$

En désignant le rapport approximatif par

$$F_k = \frac{A_k}{B_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

on peut exprimer F_k en utilisant les nominateurs et les dénominateurs des approximations précédentes. Un simple calcul nous amène à

$$F_2 = \frac{b_2 A_1}{b_2 B_1 + a_2},$$

$$F_3 = \frac{b_3 A_2 + a_3 A_1}{b_3 B_2 + a_3 B_1},$$

$$F_4 = \frac{b_4 A_3 + a_4 A_2}{b_4 B_3 + a_4 B_2}, \qquad \text{etc.}$$

Il n'est pas difficile de prouver, par induction complète, la règle générale

$$A_k = a_k A_{k-2} + b_k A_{k-1},$$

$$B_k = a_k B_{k-2} + b_k B_{k-1},$$

si l'on définit que $A_{-1} = 1, \quad A_o = 0$

et $B_{-1} = 0, \quad B_o = 1.$

En écriture matricielle, cela correspond à l'équation

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{k-2} & A_{k-1} \\ B_{k-2} & B_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Cet algorithme est souvent très efficace pour déterminer des approximations numériques de fonctions compliquées. Une illustration simple est donnée dans l'Annexe.

Or, ce qui nous attire le plus c'est le fait que la série des approximations successives a des propriétés tout à fait remarquables, dont quelques-unes sont décrites par les règles suivantes:

a) Pour des coefficients a_k et b_k positifs, les approximations F_1, F_2, F_3, etc., sont alternativement plus grandes ou plus petites que F.

b) La différence entre deux approximations successives est donnée par

$$F_k - F_{k-1} = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k} a_i}{B_k \cdot B_{k-1}} .$$

c) Une limite supérieure pour l'erreur de F_k est donnée par

$$|F_k - F| < B_k^{-2} \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i .$$

Ceux qui s'intéressent à une élaboration détaillée de la théorie des fractions continues, ainsi que de leurs applications souvent inattendues (par exemple pour l'analyse diophantienne, les nombres premiers ou les cycles d'éclipses), trouveront des exposés complets dans la littérature (par exemple dans [2] ou [3]). Pour la modeste application que nous avons en vue, n'importe quelle vulgarisation sera largement suffisante (voir p. ex. [4]).

3. Recherche des rapports rationnels près de ν_2/ν_1

En posant $a_k = 1$ (pour tous les k), notre fraction continue se simplifie à

$$F = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \dots}}} ,$$

et il suffira de prendre comme dénominateurs des entiers positifs. On peut noter ce type réduit de façon symbolique par

$$F = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

La détermination des coefficients b_k est alors fort simple, comme le montre l'exemple numérique suivant.

$$F = \frac{159}{281} = \frac{1}{281/159} = \frac{1}{1+\frac{122}{159}} = \frac{1}{1+\frac{1}{159/122}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{37}{122}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{122/37}}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{11}{37}}}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}}},$$

donc $F = \frac{159}{281} = \{1, 1, 3, 3, 2, 1, 3\}$.

Puisque $a_k = 1$, la formule de récurrence pour les coefficients A_k et B_k est maintenant

$$A_k = A_{k-2} + b_k A_{k-1},$$

$$B_k = B_{k-2} + b_k B_{k-1}.$$

Pour notre exemple, les coefficients sont rassemblés dans le tableau suivant.

k :	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
b_k:	-	-	1	1	3	3	2	1	3
A_k	1	0	1	1	4	13	30	43	159
B_k	0	1	1	2	7	23	53	76	281

Les approximations successives sont donc

$$F_1 = 1, \quad F_2 = \frac{1}{2}, \quad F_3 = \frac{4}{7}, \quad F_4 = \frac{13}{23}, \dots, F_7 = \frac{159}{281}.$$

On peut montrer qu'une fraction continue infinie correspond à une valeur irrationnelle de F. Si b_{r+1} est le premier coefficient b qui disparaît, on a

$$F_r = F \; ; \quad \text{sinon}$$

$$\lim_{k \to \infty} F_k = F.$$

Il est vrai, en outre, que F_k est la meilleure approximation possible de F pour un dénominateur ne dépassant pas B_k. L'erreur maximale de F_k est maintenant donnée par

$$\Delta F_k = B_k^{-2} .$$

Toutes ces simples et belles propriétés des fractions continues nous semblent les prédestiner à une application pour la recherche de la précision de la méthode des deux oscillateurs.

Cependant, n'essayons pas de cacher un aspect qui nous semble moins agréable. Il s'agit du fait que la série $F_1, F_2, \ldots,$ ne nous donne qu'un choix des rapports rationnels, ce qui ne garantit pas que la séquence est complète. Il est vrai que pour un dénominateur donné, c'est toujours la meilleure approximation qui nous est fournie, mais ceci n'exclut pas qu'entre F_k et F_{k+1} il existe d'autres rapports qui s'approchent mieux de F que ne le ferait F_k. Ce fait peut être illustré par l'exemple suivant.

Pour la racine carrée de deux, le développement (infini) en fractions continues est

$$1/F = 1/\sqrt{2} = \{1, 2, 2, 2, 2, \ldots \} ,$$

ce qui nous donne, après un petit calcul, les approximations

$$F_k = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1\,393}{985}, \frac{3\,363}{2\,378}, \frac{8\,119}{5\,741}, \ldots .$$

Or, une recherche numérique par ordinateur a permis de trouver pour ce domaine (où le dénominateur ne dépasse pas 10 000) les quatre rapports suivants qui sont (bien que de fort peu) de meilleures approximations de $\sqrt{2}$ que les F_k à dénominateur inférieur:

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{24}{17}, \quad \frac{140}{99} \quad \text{et} \quad \frac{816}{577} .$$

Néanmoins, il nous semble que ce petit inconvénient ne devrait pas nous empêcher de profiter des avantages que cette méthode nous offre.

ANNEXE

Approximation d'une fonction

Choisissons comme exemple d'application la fonction tgh x, pour laquelle le développement usuel en puissances de x est peu commode (nombres de Bernoulli). Le développement en fractions continues est

$$\operatorname{tgh} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots}}}} .$$

Les coefficients sont donc donnés par

$$a_1 = x\,, \quad a_k = x^2 \qquad \text{pour } k \geqslant 2$$

et $\quad b_k = 2k - 1 \qquad$ " $\quad k \geqslant 1$.

En appliquant la règle générale pour les approximations consécutives, on obtient immédiatement

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3 + x^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & x \\ 3+x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15x + x^3 \\ 15 + 6x^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15x + x^3 & 3x \\ 15 + 6x^2 & 3+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105x + 10x^3 \\ 105 + 45x^2 + x^4 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Ainsi, par exemple, pour $x = 0{,}2$ on obtient les approximations suivantes

$$F_1 = \frac{0,2}{1} = 0,200\ 000\ 00\ ,$$

$$F_2 = \frac{0,6}{3,04} \cong 0,197\ 368\ 42\ ,$$

$$F_3 = \frac{3,008}{15,24} \cong 0,197\ 375\ 32\ ,$$

$$F_4 = \frac{21,08}{106,801\ 6} \cong 0,197\ 375\ 32\ .$$

Déjà la troisième approximation donne la valeur exacte à 8 décimales près. Ceci montre que l'estimation de l'erreur sur F_3, c'est-à-dire

$$\Delta F_3 = \frac{(0,2)^5}{(15,24)^2} = 1,4 \cdot 10^{-6}\ ,$$

est très pessimiste, l'écart réel de F étant inférieur d'un facteur dépassant 100.

Références

[1] J.-J. Gostely, E. Carnal: "La méthode des deux oscillateurs pour la mesure du temps mort dans l'instrumentation nucléaire", projet d'article à soumettre à Nucl. Instr. and Meth.

[2] O. Perron: "Die Lehre von den Kettenbrüchen" (Teubner, Leipzig, 1929). Editions ultérieures en deux volumes.

[3] H.S. Wall: "Continued fractions" (Van Nostrand, New York, 1948)

[4] J. Itard: "Arithmétique et théorie des nombres", Collection "Que sais-je?", no. 1093 (Presses Universitaires, Paris, 1967^2)

(Juin 1977)